No.
Date

7 ガイダンス
14 ガイダンス

2009-10-21-水　　3回目

1. 線形代数の復習 (→レポート)

1-1 抽象ベクトル空間

Def 集合 V, 体 K ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, GF(2)$) が与えられたとき,

以下の条件をみたす V を K 上のベクトル空間という

(a) 加法 (+) $V \times V \to V$

が定義されていて, 以下をみたす → (可換群)

(1) $\forall a, b \in V$

$a+b = b+a$

(2) $\forall a, b, c \in V$

$(a+b)+c = a+(b+c)$

(3) $\vec{o} \in V$ が存在して

$a + \vec{o} = a$

(4) $\forall a \in V$ に対して, $\exists b \in V$

$a+b=0$ ($b=-a$ とかく)

No.
Date

(b) スカラー倍 $K \times V \to V$

が定義されていて, 以下をみたす

(1). $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall a \in V$

$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a$

(2) $1 \in K$ (単位元) について

$\forall a \in V$ $1 \cdot a = a$

(3) $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall a, b \in V$ に対して

$(\lambda+\mu) a = \lambda a + \mu a$

$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

$\boxed{例}$ ◦ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

◦ $\{c_1 e^x + c_2 e^{2x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

remark

e^x, e^{2x} は一次独立 $\forall x \in \mathbb{R}$

$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

◦ $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid c \sim d \in \mathbb{R}\}$

No.
Date

目標 $V \simeq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)

Lem (公理から直接導かれること)

(1) $\vec{0} \in V$ は唯一

(2) 加法の逆元 $-a$ は唯一

(3) $\forall \lambda \in K$, $\forall a \in V$ について

$\lambda = 0 \Rightarrow \lambda a = \vec{0}$

$a = \vec{0} \Rightarrow \lambda a = \vec{0}$

Def $a_1 \cdots a_n \in V$ が線形独立(一次独立)
(linearly independent)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = \vec{0}$ 線形和

$\Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$

$\Longleftrightarrow$ 対偶 $\forall c_1 \cdots c_n \in K$

$(c_1, \cdots, c_n) \neq (0, \cdots, 0)$ ← p

$\Rightarrow c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n \neq \vec{0}$ ← q

$a_1 \cdots a_n$ が線形独立でないとき線形従属という
(linearly dependent)

No.
Date

以下 $\left\{ \begin{array}{l} \text{lin. indep} \\ \text{lin. dep} \end{array} \right\}$ などで書く

線形従属

($p \Rightarrow q$ の否定 $\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) = p \wedge \neg q$)

$\exists c_1 \cdots, c_n \in K$

$\Longleftrightarrow \exists (c_1 \cdots c_n) \neq (0, \cdots 0)$

$c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = \vec{0}$

lem (確認)

(1) $\{\vec{0}\}$ は lin. dep.

(2) $a_1 \cdots a_s$ が lin dep

$\Rightarrow a_1, \cdots a_s, a_{s+1}$ は lin. dep

(3) $a \in V$ が lin indep $\Rightarrow a \neq 0$ ((1)の対偶)

Def (次元)

Vから取ってこれる lin. indep なベクトルの組の最大個数を Vの次元とよび $\dim V$と書く

$\dim V = n$

$\Leftrightarrow$ (1) ある $a_1, \cdots, a_n \in V$ が lin indep ($\dim V \geq n$)

(2) $\forall a_1 \cdots a_{n+1} \in V$ は lin dep ($\dim V \leq n$)

例 $\mathbb{R}^n$ $\dim \mathbb{R}^n = n$

(1) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(標準基底)

これらは lin indep

(2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$ に注目

→ 以下の Thm

Thm $b_1 \cdots b_s \in V$ が

$a_1 \cdots a_r \in V$ $(s > r)$

の線形結合で書けるとき

$b_1, \cdots, b_s$ は lin. dep

証明：略 → appendix //

Thm $\{v_1, \cdots v_n\} \subset V$ が基底

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall a \in V$ が

$a = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ (線形結合) ($c_i \in K$)

の形に、ただ一通りに表せる

$\Leftrightarrow$ $n = \dim V$

$v_1 \cdots v_n$ は lin indep

(証明) $\Rightarrow$

$\vec{0} = 0v_1 + \cdots + 0v_n$ で

これ以外の表し方がない ので

$v_1, \cdots, v_n$ は lin indep

$\dim V \geq n$

No.

Date

$\forall a_1 \cdots a_{n+1} \in V$ は lin. dep

[∵ $a_1 \cdots a_{n+1}$ は $v_1 \cdots v_n$ で書けるので、

先の Thm より lin dep

よって $\dim V \leq n$

$\Leftarrow$ $\forall a \in V$ について

$v_1 \cdots v_n, a$ は lin. dep (∵ $\dim V = n$)

よって $\exists (c_1 \cdots c_n, c_{n+1}) \neq (0 \cdots 0)$

$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n + c_{n+1} a = 0$

$c_{n+1} \neq 0$ (∵ $c_{n+1} = 0$ とすると $v_1 \cdots v_n$ は lin dep)

$$a = \left(-\frac{c_1}{c_{n+1}}\right) v_1 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c_{n+1}}\right) v_n$$

$= d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n$ と書ける.

(唯一性)

$a = d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n$

$a = d_1' v_1 + \cdots + d_n' v_n$

とすると

$\vec{0} = (d_1 - d_1') v_1 + \cdots + (d_n - d_n') v_n$

No.

Date

$v_1 \cdots v_n$ の lin indep より

$d_1 = d_1', \cdots, d_n = d_n'$

□

<u>Thm</u> n 次元ベクトル空間 V は 任意に基底 $v_1 \cdots v_n$ を とることで、数ベクトル空間 K^n と同一視できる.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \underset{\in K}{x_i} v_i \in V \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \overset{\in K}{y_i} v_i \in V \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$$

和 $$x + y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) v_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

スカラー倍

$$\lambda x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) v_i \longleftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

1-2 線形部分空間

Def V: ベクトル空間

部分空間 $W \subset V$ が線形部分空間 (subspace, subsp)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

W は V の加法, スカラー倍でベクトル空間になる.

$\Longleftrightarrow$

$\forall a, b \in W, \quad \forall \lambda \in K$

$a+b \in W, \ \lambda a \in W$

(加法 スカラー倍で閉じている)

Lem V: ベクトル空間

$W \subset V$ subsp. のとき

(1) $\dim W \leq \dim V$

(2) $\dim W = \dim V \Longleftrightarrow W = V$

Def linear space

$a_1 \cdots a_s \in V$ に対して

$\mathrm{span}\{a_1 \cdots a_s\}$

$:= \{\sum_{i=1}^{s} c_i a_i \mid c_i \in K\}$

Def linear space

$a_1 \cdots a_s \in V$ に対して (独立とは限らない)

$W = \mathrm{span}\{a_1 \cdots a_n\}$

$:= \{\sum_{i=1}^{s} c_i a_i \mid c_i \in K\}$

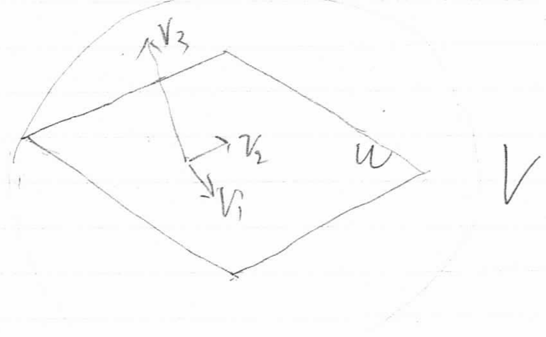
は sub sp

□ W は $a_1 \cdots a_s$ によって張られるという.

Thm (基底の延長)

$W \subset V$: subspace $\quad \dim V = n \quad \dim W = m$

$\{v_1 \cdots v_m\}$: W の基底



このとき $\exists v_{m+1}, \cdots v_n \in V$ で

$v_1, \cdots v_m, v_{m+1} \cdots v_n$ が V の基底となる.

(今までの話は内積構造は入ってない…)

2009-10-28-木　　4回目

(つづき)

前回の補足

$\mathrm{span}\{x_1 \cdots x_r\} \subset V$

$= \{\sum_{i=1}^{r} c_i x_i \mid c_i \in K\}$

Def

$X \subset V$ 部分集合

$\mathrm{span}\, X = \{\sum_{\text{finite}} c_i x_i \mid x_i \in X,\ c_i \in K\}$

span X は平面

lem　$W_1, W_2 \subset V$

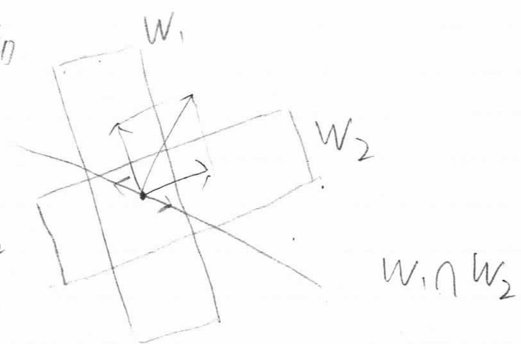
線形部分空間 (lin. subsp.)

(1)　$W_1 \cap W_2$ は lin.sub. 積

(2)　$\mathrm{span}\, W_1 \cup W_2$

$=: W_1 + W_2$

$= \{x \in V \mid \exists a \in W_1\ \exists b \in W_2\ \ x = a + b\}$



Def 直和

$W_1, W_2 \subset V$ lin. subsp が

(1)　$W_1 + W_2 = V$

(2)　$W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$　($\Leftrightarrow$ 分解が一意)

を満たすとき V は W_1 と W_2 の直和という.

(∵)　$x \in V$ が

$\Rightarrow$

$x = \underset{\in W_1}{a} + \underset{\in W_2}{b} = \underset{\in W_1}{a'} + \underset{\in W_2}{b'}$

と書けたとすると.

(2) の条件より

$a - a' = b' - b \in W_1 \cap W_2$

$a - a' = b' - b = \vec{0}$

逆に $x = a + b$ の表示が一意のとき

$\vec{0}$ の表示は $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ しかない.

$W_1 \cap W_2 \ni x \neq 0$ とすると

$x = \underset{\in W_1}{a} + \underset{\in W_2}{b}$, $a \neq 0$ または $b \neq 0$

$\Leftarrow$　小川宿題

No.

Date

1-3 線形写像

Def V, W vector space

$f: V \to W$ が… 線形写像 (lin. map)

$\overset{def}{\iff}$ (1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(2) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ $\forall \lambda \in K$ for $\forall a, b \in V$

□ $a_1 \cdots a_n \in V$

を基底 (basis) とする.

lin. map f は

基底の行先

$f(a_1) \cdots f(a_n)$

で決まる

$\forall x = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \quad c_i \in K$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(a_i)$

No.

Date

□ 表現行列

$f: V \to W$ lin map

$a_1 \cdots a_n$ $\quad b_1 \cdots b_m$

Vの基底 $\quad W$の基底

$\underset{V}{\underset{\cap}{x}} = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j \quad \underset{W}{\underset{\cap}{y}} = \sum_{j=1}^{m} y_j b_j$

$f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} f_{ij} b_i \quad f_{ij} \in K$

$j = 1 \cdots n$ とできる

□ 記法 (notation)

$f[a_1 \cdots a_n] := [f(a_1) \cdots f(a_n)]$ と

$$f[a_1 \cdots a_n] = [b_1 \cdots b_m] \underbrace{\begin{array}{cc} \overset{n}{} & \\ \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} & m \end{array}}_{=: F}$$

$x = [a_1 \cdots a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$y = [b_1 \cdots b_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

$$y = f(x) \qquad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \cap & & \cap \\ V & & W \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) = [f(a_1) \cdots f(a_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [b_1 \cdots b_m] F \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [b_1 \cdots b_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = y$$

基底による表し方は一意ゆえ

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \underset{\text{表現行列}}{F} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(基底 $a_1 \cdots a_n$ に関する
$b_1 \cdots b_m$)

例 $P_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

は ベクトル空間

$$f = \left(\frac{d}{dx} + \underset{\text{恒等写像}}{1}\right) : \underset{P_3}{\underset{\cap}{g(x)}} \longmapsto \underset{P_3}{\underset{\cap}{g'(x) + g(x)}}$$

は線形

基底 $[x^3, x^2, x, 1]$ についての表現行列

$$f[x^3, x^2, x, 1] = [x^3, x^2, x, 1] \underset{F}{\underset{\parallel}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

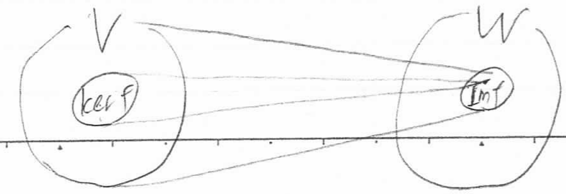
<u>Def</u> $f : V \to W$ linear

(1) $\mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in V\} \underset{W}{\subset}$
(image, 値域)

(2) $\ker f = \{x \in V \mid f(x) = \vec{0}\}$ (kernel)

<u>Lem</u> $\mathrm{Im} f \subset W$ は lin. subsp

$\ker f \subset V$ は lin. subsp



∵ Im f について

$x', y' \in \mathrm{Im}\, f$ とおくと

$\exists x, y \in V \quad x' = f(x)$

$\qquad\qquad\quad y' = f(y)$

$x' + y' = f(x) + f(y) = f(x+y) \in \mathrm{Im}\, f$

$\lambda \in K \quad \lambda x' = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in \mathrm{Im}\, f$

Ker f も同様

Def. $\mathrm{rank}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$

(= 表現行列 F の rank
基底によらない…)

<u>Thm</u> (次元定理)

$f : V \underset{\text{linear}}{\longrightarrow} W$ について

$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f = \dim V$

(証) $\ker f \subset V$ の基底を $a_1 \cdots a_r$ ($r = \dim \ker f$)

基底の延長 Thm より

$\exists b_1 \cdots b_s \in V$

○ $a_1 \cdots a_r \quad b_1 \cdots b_s$ は V の基底

○ $r + s = \dim V$

$\forall x \in V$

$x = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i + \sum_{j=1}^{s} d_j b_j$ で書ける.

$f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j f(b_j) \in \mathrm{Im}\, f$

<u>Claim</u> $f(b_1) \cdots f(b_s)$

が一次独立 を示す

示せたとおくと $\dim \mathrm{Im}\, f = s$

$\dim \mathrm{Im}\, f \geq s$ (∵ 1次独立なベクトルが s本ある)

$\mathrm{Im}\, f \leq s$ (∵ $f(x) = \sum_{j=1}^{s} d_j f(b_j)$
と任意の Im f の元が書ける)

で Thm が示せる

Claim の証明

$V' = \mathrm{span}\{b_1 \cdots b_s\}$ とおくと

$V = \ker f + V'$ は直和

(∵ $a_1 \cdots a_r \quad b_1 \cdots b_s$ は基底)(分解一意)

すなわち $\ker f \cap V' = \{0\}$ —— (*)

No.

Date

$\sum_{j=1}^{s} d_j f(b_j) = 0$ とする。と

$\parallel$

$f(\sum_{j=1}^{s} d_j b_j)$ 　　 $\sum_{j=1}^{s} d_j b_j \in \ker f$

$\rotatebox{90}{$\in$} \; V'$

よって ㊀ より

$\sum_{j=1}^{s} d_j b_j = 0$

$\{b_j\}$ は一次独立なので

$d_1 = \cdots = d_s = 0$ 　 $\square$

No.

Date

2009 - 11 - 4 - 水 　　 5回目

<u>review</u> 　 V: vec.sp.

W_1, W_2 subsp

(1) $V = W_1 + W_2$

(2) $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

直和

<u>remark</u> (1)のもとで

(2) $\Longleftrightarrow$ $x = \underset{W_1}{\underset{\cap}{a_1}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{a_2}}$ 分解が一意

$\Rightarrow$ 先週

$\Leftarrow$ 対偶 ($\neg(2) \Rightarrow$ 分解が一意でない)

$\exists b \in W_1 \cap W_2$, $b \neq 0$

$x = \underset{W_1}{\underset{\cap}{a_1}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{a_2}} = \underbrace{(a_1 + b)}_{\in W_1} + \underbrace{(a_2 - b)}_{\in W_2}$

異なる分解 　 $\square$

前回 次元定理

$f : V \xrightarrow[\text{linear}]{} W$

$\dim V = \dim \mathrm{Im} f + \dim \ker V$

Lem (1) f 単射 $\Longleftrightarrow \ker f = \{0\}$

(2) f 単射 $\Longleftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim V$

(3) f 全射 $\Longleftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim W$

(4) f 全単射 $\Longleftrightarrow$ (1),(3)

∵ (1) $\Longrightarrow$ f が単射のとき

$f(0) = 0$

$x \neq 0$ ならば $f(x) \neq 0$

(異なるものの先は異なる)

よって $\ker f = \{0\}$

$\Longleftarrow$ $f(x) = f(y)$ とおく

$0 = f(x) - f(y) = f(x-y)$

$\ker f = \{0\}$ より $x - y = 0$ ∴ $x = y$

よって f は単射 □

(2) f 単射 $\underset{(1)}{\Longleftrightarrow} \ker f = \{0\}$

$\Longleftrightarrow \dim \ker f = 0$

$\Longleftrightarrow \dim V = \dim \mathrm{Im} f$

(3) $\mathrm{Im} f \subset W$ subsp

$\dim \mathrm{Im} f = \dim W \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f = W$

$\Longleftrightarrow f$ 全射

行列の場合 (rank)

$\mathrm{rank}\, f = \dim \mathrm{Im} f$

A : $m \times n$ 次元行列

$$A = \underbrace{[f_1, f_2, \cdots, f_n]}_{n} \Big\updownarrow m$$

$\mathrm{rank}\, A = \dim \mathrm{Im} A \quad (A : K^n \xrightarrow[\text{linear}]{} K^m)$

$$= \dim \left\{ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \right\}$$

$$= \dim \left\{ \sum_i x_i f_i \,\middle|\, x_i \in K \quad i = 1, \cdots, n \right\}$$

$=$ 「$f_1 \cdots f_n$ の独立なベクトルの本数」

1-4 基底変換

$$
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; K^n \arrow[rr, "F"] & & K^m \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\
V \arrow[u, "{[a_1, a_n]}"] \arrow[r, "f", "\text{linear}"'] \arrow[d, "{[a_1' \cdots a_n']}"'] & W \arrow[ur, "{[b_1, b_m]}"'] \arrow[dr, "{[b_1' \cdots b_m']}"] & \\
\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \arrow[rr, "F'"'] & & \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

$f : [a_1 \cdots a_m] = [b_1 \cdots b_m] F$ → 表現行列

$$[f(a_1) \cdots f(a_n)] = \sum_{i=1}^{m} f_{ij} b_i$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$a_j' = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} a_i \quad (j = 1 \cdots n)$$

$$[a_1' \cdots a_n'] = [a_1 \cdots a_n] S = (s_{ij})$$

基底変換行列 とも言う メモ

このとき

$$\underset{\text{旧ベクトル}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = S \underset{\text{新ベクトル}}{\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}} \text{ が成立}$$

$\because$

$$= [a_1 \cdots a_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= [a_1 \cdots a_n] S \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

↑ 上へ向かって

$$x = [a_1' \cdots a_n'] \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

同様にして

$$[b_1' \cdots b_m'] = [b_1 \cdots b_m] T$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}$$

よって $F' = T^{-1} F S$ ：表現行列の変換則

特に、$V = W$

$$\{a_1 \cdots a_n\} = \{b_1 \cdots b_m\}$$

$$\{a_1' \cdots a_n'\} = \{b_1' \cdots b_m'\}$$

のとき $S = T$ で

$F' = S^{-1} F S$ ：相似変換

No.

Date

1-5 固有値，固有ベクトルと対角化

Def $f: V \xrightarrow[\text{linear}]{} V$ に対して

$f(x) = \lambda x$

$x \in V,\ x \neq 0 \quad \lambda \in K$

λを固有値，xを固有ベクトルと呼ぶ

Lem λを $f: V \xrightarrow[\text{linear}]{} V$ の固有値とするとき，

$V(\lambda) := \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$

は sub space（固有空間）

∵ $f(x_1) = \lambda x_1 \qquad f(x_2) = \lambda x_2$

$f(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$

$\therefore\ x_1 + x_2 \in V(\lambda)$

$\square\ f(\mu x_1) = \lambda(\mu x_1),\ \mu x_1 \in V(\lambda)$

Lem A: $n \times n$ 行列 $\lambda \in K$ 固有値

$\Longleftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{} = 0$

$\quad \equiv$

$\varphi_A(\lambda)$ 固有多項式

No.

Date

remark

$B = S^{-1}AS$ （相似変換）

$\varphi_B(\lambda) = \det\{S^{-1}(A - \lambda I)S\}$

$= \varphi_A(\lambda)$

Lem A: $n \times n$ 行列

$\begin{cases} \lambda_1 \cdots \lambda_s & \text{相異なる固有値 } (s \leq n) \\ x_1 \cdots x_s & \text{対応する固有ベクトル} \end{cases}$

とすると $x_1 \cdots x_s$ は一次独立

〈証明〉

（背理法）$x_1 \cdots x_s$ が独立でないとすると，

$1 < \exists r < s \quad x_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i$ —— ①

（$x_1 \cdots x_r$ は独立）

$(c_1 \cdots c_r) \neq (0, \cdots, 0)$

両辺に A をかけると $A x_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i A x_i$

$\qquad \parallel$

$\lambda_{r+1} x_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i \lambda_i x_i$ —②

x_{r+1} を消去（① × λ_{r+1} −②）

$0 = \sum_{i=1}^{r} c_i(\lambda_{r+1} - \lambda_i) x_i$

No.
Date

$$0=\sum_{i=1}^{r} \underbrace{c_i(\lambda_{r+1}-\lambda_i)}_{すべて0でない} x_i$$

と云って $x_1 \cdots x_r$ が独立である 矛盾 □

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$$

相似変換で対角行列
「Aは、対角化可能」と言う
（目標：エルミート行列の対角化）

Lem：① $\begin{cases} \lambda_1 \cdots \lambda_n ：行列 A の固有値 \\ x_1 \cdots x_n ：対応する固有ベクトル \end{cases}$

$P=(x_1 \cdots x_n)$ とおく（$n\times n$ 行列）

② $AP=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

このとき ① ⇔ ②

∵ ① ⇔ $Ax_i=\lambda_i x_i$ $(i=1,2\cdots n)$

⇔ $[Ax_1 \cdots Ax_n]=[\lambda x_1 \cdots \lambda x_n]$

⇔ $A\underbrace{[x_1 \cdots x_n]}_{P}=\underbrace{[x_1 \cdots x_n]}_{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$

No.
Date

2009-11-11-水 6回目

1-6 内積

以降 体 $K=\mathbb{C}$ とする。

<u>Def</u> エルミート内積

$\langle \cdot , \cdot \rangle : V\times V \to \mathbb{C}$

が以下の条件をみたすとき

V 上のエルミート内積

$\forall x,y,z \in V$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$

(1) 正値性

$\langle x, x\rangle \geq 0$, 等号 ⇔ $x=0$

(2) 半線形性（sesqui-linear）

$\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$

$\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

(3) エルミート対称性

$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

系 $n\times n$ 行列 A が相異なる固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ を持つとき対角化可能 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Remark (2)(3)より次が成立

(4) $\langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$

$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$\because$ $\langle \lambda x, y\rangle \underset{(3)}{=} \overline{\langle y, \lambda x\rangle} \underset{(2)}{=} \overline{\lambda\langle x, y\rangle}$

$= \bar{\lambda}\cdot\overline{\langle x, y\rangle} \underset{(3)}{=} \langle x, y\rangle$

他も同様

Remark 二つの流儀

□ 数学流 $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

$\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$

□ 物理流 $\langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$

$\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

ブラケット記法で相性よい

Def ノルム

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

が以下の条件をみたすときノルムという

$\forall x, y \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(1) $\|x\| \geq 0$, 等号 $\Leftrightarrow x = 0$

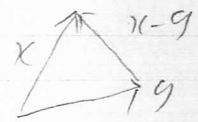
(2) 三角不等式

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

Lem $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$

はノルム(の1つ)になる



Remark $d(x, y) = \|x - y\|$ は距離

Thm (Schwartzの不等式)

$\forall x, y \in V$

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

[実内積 $\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|\cos\theta$

$\leq \|x\|\,\|y\|$]

等号成立 $\Leftrightarrow$ x, yが一次独立

($\exists \lambda \in \mathbb{C}$ $y = \lambda x$)

(証明) $y = 0$のときは成立

$y \neq 0$のとき.

$y \in V$を任意にとって

$y' = \langle y, x\rangle y$ とおく

No.
Date

$\|tx-y'\|^2$

$=\|tx-\langle y,x\rangle y\|^2$

$=t^2\|x\|^2-\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle t-\overline{\langle y,x\rangle}\langle y,x\rangle t+|\langle y,x\rangle|^2\|y\|^2$

$=\|x\|^2t^2-2|\langle x,y\rangle|^2t+|\langle x,y\rangle|^2\|y\|^2\geq 0$

$(\forall t\in\mathbb{R})$

判別式の ボロンより

$\begin{cases} at^2+bt+c\geq 0 \ (\forall t\geq 0) \\ \Longleftrightarrow \ b^2-4ac\leq 0 \end{cases}$

$\{2|\langle x,y\rangle|^2\}^2-4\cdot|\langle x,y\rangle|^2\|x\|^2\|y\|^2\leq 0$

これらまでよし。 等号成立条件は略

<u>Lem</u> 極化形式

$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2$

$-(\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)\}$

ノルム $\underset{同等}{\longleftrightarrow}$ 内積

No.
Date

③ 計算

<u>例</u> $\mathbb{C}^n$ 上の エルミート内積

$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n,\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}y_i$ $(x_i\bar{y}_i$ でも可$)$

標準内積

<u>Def</u> □ $x\perp y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \langle x,y\rangle=0$

xとyは直交

□ $x_1,\cdots,x_n\in V$

$\begin{cases}\forall i\neq j, \ x_i\perp x_j \\ \|x_i\|=1 \ (i=1\cdots n)\end{cases}$

Orthogonal Normal System

のとき $\{x_n\}$ 正規直交系 ONS

基底になる場合... 基底でもある CONS

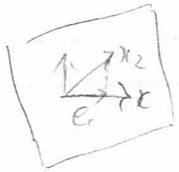
□ $\{x_n\}$が CONS 完全正規直交系 (Complete)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \{x_i\}_{i=1}^{n}$が基底 かつ ONS

<u>Thm</u> グラム・シュミットの直交化

Thm グラム・シュミットの直交化

$\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset V$ が一次独立とする.



$x_1, x_2, \cdots, x_n$

$y_1 = x_1$, $e_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$

$y_2 = x_2 - \langle e_1, x_2 \rangle e_1$, $e_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$

$\vdots$

$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle e_j, x_i \rangle e_j$, $e_i = \dfrac{y_i}{\|y_i\|}$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$

1-7 エルミート作用素

Def エルミート共役

$A : V \to V$ (linear)

に対して

$\forall x, y \in V$

$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$

をみたす $A^* : V \to V$ (linear)

が存在する. A のエルミート共役という

例 $\mathbb{C}^n$, 標準内積

$A = (a_{ij})$ $n \times n$ 行列

$A^* = (\overline{a_{ji}})$ 転置複素共役

∵ $e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$ $(k = 1 \cdots n)$

CONS

$Ae_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$

$\langle Ae_k, e_\ell \rangle = \overline{a_{\ell k}}$

$\langle e_k, A^* e_\ell \rangle = \overline{a_{\ell k}}$

$A^* e_\ell = (\overline{a_{ji}}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \ell$

$= \begin{pmatrix} \overline{a_{\ell 1}} \\ \vdots \\ \overline{a_{\ell n}} \end{pmatrix}$ □

Lem エルミート作用素の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.

∵ A : エルミート

$Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$(x \neq 0)$ $\quad (y \neq 0)$

No.

Date

Def $A^* = A$ $\iff$ A はエルミート

Lem エルミート作用素の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する

∵ A : エルミート

$Ax = \lambda x,\ Ay = \mu y$ $(y \neq 0\ \lambda, \mu \in \mathbb{C})$

$\langle Ax, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$

No.

Date

2009-11-25-木 7日目

Def 直交補空間

$W \subset V$ subsp

$W^\perp = \{ x \in V \mid \forall y \in W\ \langle x, y \rangle = 0 \}$

Lem $W^\perp$ は W の補空間

∵ $x \in W \cap W^\perp$ 一意分解

$\|x\|^2 = \langle \underset{W^\perp}{x}, \underset{W}{x} \rangle = 0$

一方 W の基底を (CONS)

$a_1 \cdots a_m \in W$ $m = \dim W$

とする.

$\underset{W^\perp}{y} = x - \underbrace{\langle a_1, x \rangle a_1 - \cdots - \langle a_m, x \rangle a_m}_{z}$ $\in W$

$x = y + z$

$a_i\ (i = 1 \cdots m)$ について

$\langle a_i, x \rangle = \langle a_i, x \rangle - \langle a_i, x \rangle = 0$ 17

Remark $\forall x \in V$ は

$x = \underset{W}{y} + \underset{W^\perp}{z}$ に一意分解

No.
Date

No.
Date

1-7 エルミート作用素の対角化

review

Def $\forall x, \forall y \in V$

$\langle x, Ay \rangle = \langle A^* x, y \rangle$

となる作用素 A^* が存在

A^*: エルミート共役

Def $A = A^*$ エルミート作用素

Lem エルミート作用素 A の固有値は実数

(:) λ: A の固有値

x: 対応する eigen vector $(x \neq 0)$

$$\langle x, \underset{\lambda x}{Ax} \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$
$$\| $$
$$\langle A^* x, x \rangle = \langle \underset{\lambda x}{Ax}, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

$\langle x, x \rangle \neq 0$ より $\lambda = \bar{\lambda}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ □

Lem エルミート作用素 A の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.

(:) λ: eigen val $\longleftrightarrow$ x: eigen vec

λ: eigen val $\longleftrightarrow$ x: eigen vec
$\#$
μ: 〃 $\longleftrightarrow$ y:

$$\langle x, \underset{\mu y}{Ay} \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$
$$\| $$
$$\langle Ax, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

よって

$$(\underset{\neq 0}{\lambda - \mu}) \langle x, y \rangle = 0$$

$\therefore \langle x, y \rangle = 0$ □

Thm エルミート行列 A は固有ベクトルからなる

行列 $P = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ $n = \dim V$

によって対角化可能

i.e. $\begin{cases} AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \theta \\ & \ddots & \\ \theta & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ a_1, \cdots a_n \text{ は基底 } (P^{-1} \text{ が存在}) \end{cases}$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \theta \\ & \ddots & \\ \theta & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

証明 n についての帰納法

No.
Date

証明

λ: eigen val, a: eigen vec

$W := \{x \in V \mid \langle x, a \rangle = 0\}$

$\quad = \mathrm{span}\{a\}^{\perp}$

□ W は A で不変 (invariant)

i.e. $AW \subset W$ を示す

$AW = \{Ax \mid x \in W\}$

subsp

$\forall x \in W$ について

$\langle Ax, a \rangle = \langle x, Aa \rangle = \lambda \langle x, a \rangle$

$\lambda a = 0$

よって $Ax \in W$ $\quad \therefore AW \subset W$

これより A の制限

$A' := A|_W : W \to W$ が定義できる

$\dim W = \dim V - 1$

よって帰納法の仮定より A' は

eigen vec $a_1, \cdots, a_{n-1}$ により対角化可能

$a_n = a$ とおいて $a_1, \cdots, a_n$ は W の基底

□

No.
Date

Thm. エルミート行列 A は直交する固有ベクトル

$a_1, \cdots, a_n$ によって対角化可能

(∵) □ 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交 (既述)

□ 同じ固有ベクトルに対応する固有ベクトルについては

グラム・シュミットの直交化をすればよい □

1-8 正定値性

Def $A: V \to V$ linear operator

□ $A \geq 0 \overset{def}{\iff} \forall x \in V \quad \langle x, Ax \rangle \geq 0$

(非負定値)

□ $A > 0 \overset{def}{\iff} \forall x \in V \quad \langle x, Ax \rangle > 0$

(正定値)

Def □ $A \geq B \overset{def}{\iff} A - B \geq 0$

□ $A > B \overset{def}{\iff} A - B > 0$

Lem 以下は同値

(1) A がエルミート

(2) $\forall x, \forall y \in V \quad \langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$

(3) $\langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}$

∵ (2)

$\iff \langle Ax, y\rangle \underset{一般}{=} \langle x, A^*y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

for $\forall x, y \in V$

$\iff \langle x, (A^*-A)y\rangle = 0$ for $\forall x, y\in V$

$\iff (A^*-A)y = 0 \quad \forall y \in V$

$\iff A = A^*$

$\iff (1)$

一般に $\underset{\overline{\langle x, Ax\rangle}}{\underset{\|}{\langle Ax, x\rangle}} = \langle x, A^*x\rangle \underset{(1)}{=} \langle x, Ax\rangle$

$(1) \Rightarrow (3)$ 上より

$(3) \Rightarrow (1)$

(3)より $\overline{\langle x, Ax\rangle} = \langle x, Ax\rangle$

$\langle x, Ax\rangle = \langle x, A^*x\rangle \quad \forall x \in V$

Fact $\left[\begin{array}{l} \forall x, \forall y \in V \\ \langle x, Ay\rangle = \langle x, By\rangle \iff A = B \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{l} \forall x \in V \\ \langle x, Ax\rangle = \langle x, Bx\rangle \iff A = B \end{array}\right]$

より $A = A^*$

Lem 以下は同値

(1) $A = B$

(2) $\forall x, \forall y \in V$

$\langle x, Ay\rangle = \langle x, By\rangle$

(3) $\forall x \in V$

$\langle x, Ax\rangle = \langle x, Bx\rangle$

∵ $(1) \iff (2) \Rightarrow (3)$ は明らか

$(3) \Rightarrow (1)$ を示す.

Claim

$$\begin{aligned} 4\langle x, Ay\rangle &= \langle (x+y), A(x+y)\rangle - \langle (x-y), A(x-y)\rangle \quad ①=4\,\mathrm{Re}\langle x, Ay\rangle \\ &+ i\langle (ix+y), A(ix+y)\rangle - i\langle (ix-y), A(ix-y)\rangle \quad ②=4i\,\mathrm{Im}\langle x, Ay\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{4} (i)^{*}\langle \{(i)^k x + y\}, A\{(i)^k x + y\}\rangle \end{aligned}$$

Lem A: 任意の作用素

$A^*A \geq 0$

∵ $\forall x \in V$

$\langle x, A^*Ax \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0$

Lem $A \geq 0 \Rightarrow A$ はエルミート

∵ $\forall x \in V$ $\underset{0}{\underset{\mathbin{\rotatebox{90}{$\leq$}}}{\langle x, Ax \rangle}} \in \mathbb{R}$ と前Lemより □

1-9 射影子

Def $W \subset V$ subsp

$\forall x = \underset{W}{\underset{\cap}{y}} + \underset{W^\perp}{\underset{\cap}{z}}$

一意に分解できる。

$P_W x = y$ は lin. op.

W への射影子（射影作用素）
(projection)

という

Lem P_W: $x = \underset{W}{\underset{\cap}{y}} + \underset{W^\perp}{\underset{\cap}{z}} \longmapsto y$

(1) $x \in W \Rightarrow P_W x = x$

$x = \underset{W}{\underset{\cap}{x}} + 0$

(2) $x \in W^\perp \Rightarrow P_W x = 0$

$x = \underset{W}{\underset{\cap}{0}} + \underset{W^\perp}{\underset{\cap}{x}}$

(3) $P_W + P_{W^\perp} = I$

$\underset{y}{\underset{\parallel}{P_W x}}$ $\underset{z}{\underset{\parallel}{P_{W^\perp} x}}$ $(P_W + P_{W^\perp})x = y + z = x$

Lem 以下は同値

(1) P は或る部分空間 W への射影子 $(P = P_W)$

(2) $P^* = P = P^2$ このとき $W = \mathrm{Im}\, P = \ker(I - P)$

∵ (1) $\Rightarrow$ (2) $\exists W \subset V$, $P = P_W$ とする

$\forall x \in V$ $Px \in W$ より $P^2 x = PPx = Px$

よって $P^2 = P$

No.
Date

$\forall x \in V$ について　$x = \underset{P_W}{y} + \underset{P_{W^\perp}}{z}$

$$\langle P^* x, x\rangle = \langle x, Px\rangle$$
$$= \langle x, y\rangle$$
$$= \langle y+z, y\rangle$$
$$= \langle y, y\rangle$$
$$= \langle y, y+z\rangle \quad \text{yとzは直交するので0}$$
$$= \langle Px, x\rangle$$

これより $\langle x, P^* x\rangle = \langle x, Px\rangle$

$$P^* = P$$

$(2) \Rightarrow (1)$

$W = \mathrm{Im}\,P$ とおく

$y \in W$ ならば $\exists x \in V,\ y = Px$

よって

$$Py = P^2 x = Px = y$$

$$W = \mathrm{Im}\,P \subset \{y \in V \mid Py = y\} \subset \mathrm{Im}\,P$$

$$y \in W \Rightarrow y \in \{y \in V \mid Py = y\}$$

すなわち $\underset{\mathrm{Im}\,P}{\overset{\parallel}{W}} = \{y \in V \mid \underbrace{Py = y}_{(I-P)y=0}\} = \ker(I-P)$

No.
Date

$x = \underset{W = \mathrm{Im}\,P}{\overset{\Uparrow}{y}} + \underset{W^\perp}{\overset{\Uparrow}{z}}$ とおいて

$$Px = Py + Pz$$
$$= y + Pz$$

$\forall a \in V$ について

$$\langle Pz, a\rangle = \langle z, \underset{W}{\overset{\Uparrow}{Pa}}\rangle = 0$$

$$Pz = 0$$

□

No.

Date

2009-12-9-水　　8回目

1-9　トレース

<u>Def</u>　$\underset{(a_{ij})}{\overset{\shortparallel}{A}}$: $n \times n$ 行列

$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

<u>Lem</u>　トレースの性質

(1)　線形性

$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\, A + \mathrm{Tr}\, B$

$\mathrm{Tr}(cA) = c\, \mathrm{Tr}\, A$

(2)　$\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$

$A : m \times n$　$B : n \times m$

<u>Def</u>　$F : V \to V$　linear operator

$a_1 \cdots a_n$　基底 basis

$F[a_1 \cdots a_n] = [a_1 \cdots a_n]\hat{F}$

$\hat{F}$: 表現行列

$\mathrm{Tr}\, F := \mathrm{Tr}\, \hat{F}$

これは基底のとり方によらない

$a_1' \cdots a_n'$　他の basis

No.

Date

$F[a_1' \cdots a_n'] = [a_1' \cdots a_n']\hat{F}'$

基底の変換

$[a_1' \cdots a_n'] = [a_1 \cdots a_n]S$

これにより　$\hat{F} = S\hat{F}'S^{-1}$

よって　$\mathrm{Tr}\hat{F} = \mathrm{Tr}\, S\hat{F}'S^{-1} = \mathrm{Tr}\hat{F}'$

以下内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとする.

$\mathrm{Tr}\, F = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, Fe_i \rangle$　　$\lambda_i e_i$

ただし $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ は CONS

特に　$Fe_i = \lambda_i e_i$

$\left\{\begin{array}{l}\text{CONS } e_i \text{ Fの固有ベクトル} \\ \lambda_i \text{ Fの固有値}\end{array}\right.$

のとき　$\mathrm{Tr}\, F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

1-10　トレースと非負定値

V : vector sp　内積 $\langle\ ,\ \rangle$

<u>Lem</u>　$F : V \to V$ に対して 以下は同値

(1)　$F \geq 0$

No.

Date

(2) Fはエルミートで固有値はすべて非負

(3) $\exists G : V \to V$, $F = G^* G$ 行列版 $a = \sqrt{a}\sqrt{a}$

(1) ⇒ (2)

$F \geq 0 \Rightarrow F$はエルミート

固有ベクトルからなるCONSが存在

$F e_i = \lambda_i e_i$

$0 \leq \langle e_i, \underbrace{F e_i}_{\lambda_i e_i} \rangle = \lambda_i$

(2) ⇒ (3)

$G : V \to V$を

$G e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$

で定義する.

$\underset{F}{\overset{\|}{G^2}} e_i = G(\sqrt{\lambda_i} e_i)$

$= \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_i} e_i$

$\therefore G^2 = F$

$G^* = G$も示せる よって $F = G^* G$

No.

Date

Remark

$G' = UG$ U: ユニタリ

$G'^* G' = (UG)^* (UG)$

$= G^* U^* U G$

$= G^* G$

(3) ⇒ (1) は練習

Lem $F = G^* G$ について以下が成立

(a) $\forall \psi \in V$ について以下同値

(1) $\langle \psi, F \psi \rangle = 0$

(2) $F\psi = 0$ ($\Leftrightarrow \psi \in \ker F$)

(3) $G \psi = 0$

(1) ⇒ (3)

$0 = \langle \psi, F\psi \rangle = \langle \psi, G^* G \psi \rangle$

$= \langle G\psi, G\psi \rangle$

$= \|G\psi\|^2$ $\therefore G\psi = 0$

(3) ⇒ (2) 明らか

(2) ⇒ (1) 〃

No.

Date

(b) $F=0 \Rightarrow G=0$

∵ $F=0 \Leftrightarrow \forall \psi \in V,\ F\psi=0$

$\Leftrightarrow \forall \psi \in V,\ G\psi=0$ } (a) (2)⇔(3)

$\Leftrightarrow G=0$

Lem $F \geq 0$ について

$\mathrm{Tr}\,F \geq 0$

等号成立 $(\mathrm{Tr}\,F=0) \Leftrightarrow F=0$

∵ $F \geq 0$ より F はエルミート

$\mathrm{Tr}\,F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0$

λ_i 固有値　$\lambda_i \geq 0$

(等号成立条件) $\Leftrightarrow \lambda_i = 0\ (i=1, \cdots n)$

$\Leftrightarrow F=0$

Lem $F \geq 0,\ G \geq 0$ について

$\mathrm{Tr}\,FG \geq 0$

(等号成立) $\Leftrightarrow FG=0$

∵ $F = X^*X,\ G = Y^*Y$ と書ける

$\mathrm{Tr}\,FG = \mathrm{Tr}\,X^*XY^*Y$

No.

Date

$= \mathrm{Tr}\,YX^*XY^*$

$= \mathrm{Tr}\,(XY^*)^*(XY^*)$　　$XY^* = Z$ とする

$= \mathrm{Tr}\,Z^*Z$　　Z^*Z で表せるのは非負定値

≥ 0

(等号成立) $\Leftrightarrow (XY^*)^*(XY^*) = 0$

$\Leftrightarrow XY^* = 0$

$\Rightarrow \underbrace{X^*XY^*Y}_{FG} = 0$

$\Rightarrow$ (等号成立)

□

$F = G^*G$

$F=0 \Leftrightarrow G=0$

No.

Date

2. 量子力学系の公理

2-1 ブラケット記法

$\mathcal{H}$: Hilbert space

$\simeq \mathbb{C}^n$ 　$\langle\cdot|\cdot\rangle$ 内積　(ベクトル空間との違い)

□ ケット $\psi \in \mathcal{H}$ を $|\psi\rangle$

□ ブラ $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\underset{\mathcal{H}}{|\psi\rangle} \mapsto \underset{\mathbb{C}}{\langle\varphi,\psi\rangle}$$

は線形作用素(汎関数) functional

これを $\langle\varphi|$ で表す

例 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ 　内積

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix} \qquad \langle\varphi,\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i^*\psi_i$$

このとき

$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots \\ \varphi_n\end{pmatrix} \qquad \langle\varphi| = (\varphi_1^* \cdots \varphi_n^*)$$

<u>Remark</u> 双対ベクトル空間

$$\mathcal{H}^* = \{ f \mid \underset{\text{functional}}{f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}} \}$$ とおく

No.

Date

$\mathcal{H}^*$ はベクトル空間 (双対ベクトル空間)

・$\underset{\mathcal{H}^*}{(f} + \underset{\mathcal{H}^*}{g)} : \underset{\mathcal{H}}{|\psi\rangle} \longmapsto f(\psi) + g(\psi)$ 　加法

・$(cf) : |\psi\rangle \longmapsto cf(\psi)$ 　スカラー倍

・
$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H}^* \\ \psi & & \psi \\ |\psi\rangle & \longmapsto & \langle\psi|\end{array}$$

anti linear

$$|c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\rangle \longmapsto c_1^*\langle\varphi_1| + c_2^*\langle\varphi_2|$$

<u>Thm</u> リースの表現定理

$f \in \mathcal{H}^*$ に対して

$|\varphi_f\rangle \in \mathcal{H}$ があって

$f(\psi) = \langle\varphi_f, \psi\rangle$ for $\forall \psi \in \mathcal{H}$

例 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ のとき

$$\underset{\mathcal{H}^*}{f} : \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f_i\psi_i$$

と書ける 　　$\underset{\mathcal{H}}{|\varphi_f\rangle} = \begin{pmatrix} f_1^* \\ \vdots \\ f_n^*\end{pmatrix}$

(∵ 各成分に対して線形なので)

∘ $(|\psi\rangle)^* = \langle\psi|$

∘ $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ について

$$\underbrace{|\psi\rangle\langle\varphi|}_{\mathcal{H}^*} : \underset{\mathcal{H}}{|\chi\rangle} \longmapsto \underset{\mathcal{H}}{|\psi\rangle\langle\varphi,\chi\rangle}$$

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

は rank $=1$ の operator

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(|\psi\rangle\langle\varphi|) &= \dim \mathrm{Im}(|\psi\rangle\langle\varphi|) \\ &= \dim \mathrm{span}\{|\psi\rangle\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Lem $|e_i\rangle\ (i=1\cdots n)$ CONS

$$I = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|$$

(証) 略

Lem $A: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

$|e_i\rangle\ (i=1\cdots n)$ CONS

による A の成分行列は

$$a_{ij} = \langle e_i, A e_j\rangle$$

$$A = \sum_i \sum_j a_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$$

と書ける

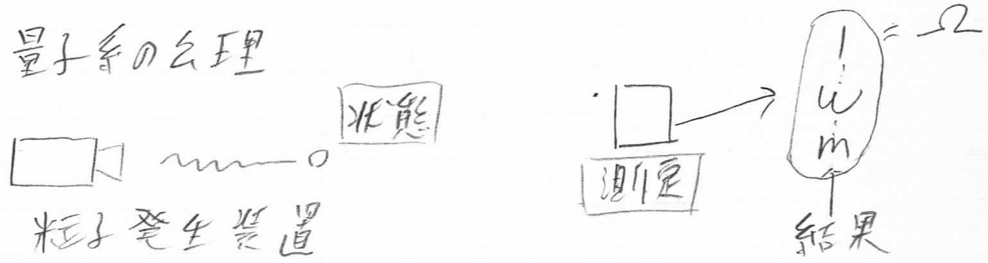
例 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & & a_{ij} & \\ \vdots & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots |e_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \quad \cdots \quad |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle e_i, A e_j\rangle \\ &= (0 \cdots \underset{i\text{-th}}{1} \cdots 0)\, A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j\text{-th} \end{aligned}$$

2-2 量子系の公理



記法 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ Linear op 全体

半正定値

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \rho^* = \rho \geq 0 \ \ \mathrm{Tr}\,\rho = 1\}$$

密度作用素

(1) 状態は $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ で指定される

(2) 測定結果全体が Ω である測定は

$$\sum_{\omega \in \Omega} M_\omega^* M_\omega = I$$

である作用素の組 $M = \{M_\omega\}$ で指定される.

No.

Date

(3) 測定結果 $\omega \in \Omega$ を得る確率は

$$p(\omega) = \mathrm{Tr}\,\rho M_\omega^* M_\omega$$

で与えられる

$$p(\omega) = \mathrm{Tr}\,\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\le$} \\ 0}}{\rho}\,\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\le$} \\ 0}}{\underline{M_\omega^* M_\omega}} \geq 0$$

$$\sum_\omega p(\omega) = \mathrm{Tr}\,\rho \underbrace{\sum_\omega M_\omega^* M_\omega}_{= I}$$

$$= \mathrm{Tr}\,\rho = 1$$

(4) 測定値 $\omega \in \Omega$ が得られた後の状態

$$\frac{M_\omega \rho M_\omega^*}{\mathrm{Tr}\,\rho M_\omega^* M_\omega} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$$

($\because$ $A \geq 0 \Rightarrow C^* A C \geq 0$ 証明略)

(5) 孤立系の状態の測定以外の状態変化

$$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \longmapsto U \rho U^* \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$$

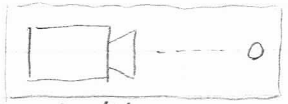
U: ユニタリ //

No.

Date

12-16-水　9回目

review　$\mathcal{H}$: Hilbert



測定 $\longrightarrow \omega \overset{\sim P}{\in} \Omega = \{1, \dots, m\}$

(1) 状態

$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$

$\left[\begin{array}{l} \rho^* = \rho \geq 0 \\ \mathrm{Tr}\,\rho = 1 \end{array}\right]$

(2) $M_\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$　作用素

$\sum_{\omega \in \Omega} M_\omega^* M_\omega = I$

$M = \{M_\omega\}$

(3) $P(\omega) = \mathrm{Tr}\,\rho M_\omega^* M_\omega$

(4) 測定後の状態

(5) 状態の変化

POVM

測定後の状態に興味がないとき.

$\rightarrow$ $E_\omega = M_\omega^* M_\omega$ $(\omega \in \Omega)$ を考えれば十分

このとき E_ω は

(☆) $\begin{cases} E_\omega^* = E_\omega \geq 0 \\ \sum_{\omega \in \Omega} E_\omega = I \end{cases}$ をみたす

□ 逆に(☆)をみたすものは $E_\omega = M_\omega^* M_\omega$ の形で書ける

(M_ωは測定作用素 mesurement operator)

□ (☆)をみたす $E = \{E_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ を POVM という

(Positive (propability) Operator Valued Measure)

□ POVM $E = \{E_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ について E_ω がすべて射影のとき PVM (Projection Valued Measure)

2-3 純粋状態と混合状態

スペクトル分解

A: エルミート作用素

$\{|e_i\rangle\}_{i=1}^n$ CONS on $\mathcal{H}$ $(\dim \mathcal{H} = n)$

$A = \sum_{i,j} a_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$

$a_{ij} = \langle e_i|A|e_j\rangle$

ここで

$A|a_i\rangle = \lambda_i |a_i\rangle$

$\begin{cases} \lambda_i : 固有値 \\ |a_i\rangle : 固有ベクトル \end{cases}$

$\{|a_i\rangle\}$ CONS

No.

Date

とできるので、$|e_i\rangle = |a_i\rangle$ とすると

$$A = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i|$$ とする

shatten分解

成分で表せば

$$A \simeq \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ 対角化

一方で、スペクトル分解がある

$$\begin{cases} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \cdots, \lambda_{1j_1} = a_1 \leftarrow \text{同じ固有値} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \cdots, \lambda_{2j_2} = a_2 \\ \vdots \\ \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \cdots, \lambda_{kj_k} = a_k \end{cases}$$

このように固有値に重解があるとき

$$A = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{j_i} \lambda_{ij} |e_{ij}\rangle\langle e_{ij}|$$

$$\lambda_{ij} = a_i \quad (j = 1 \cdots j_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \underset{a_i}{\lambda_{ij}} \underbrace{\sum_{j=1}^{j_i} |e_{ij}\rangle\langle e_{ij}|}_{E_j}$$ 射影子

No.

Date

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i E_i$$ スペクトル分解（一意）

$$\mathrm{Im}\, E_i = \mathrm{span}\{|e_{ij}\rangle \mid j = 1 \cdots j_i\}$$

固有値 a_i の固有空間

・ここで特に $A = \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$

のとき

$$\rho = \sum_{i=1}^{k} a_i E_i$$ と書ける

shatten分解は

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

固有値　固有ベクトル（ノルム1）

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad (\because \mathrm{Tr}\rho = 1) \\ \lambda_i \geq 0 \quad (\because \rho \geq 0) \end{cases}$$ （確率）

確率の凸結合

given $P_1(x), \cdots, P_m(x)$

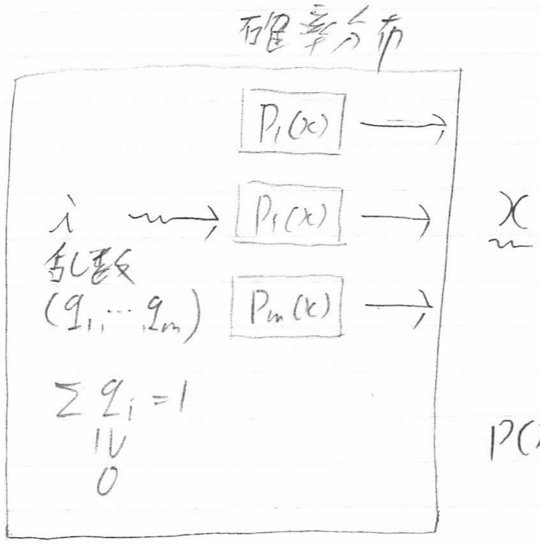
確率分布

$P_1(x)$

$\lambda \rightsquigarrow P_i(x) \longrightarrow x$

乱数

$P_m(x)$



同時分布

$$p(i, x) = q_i p_i(x)$$

$$\downarrow$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{m} p(i, x) = \sum_{i=1}^{m} q_i p_i(x)$$

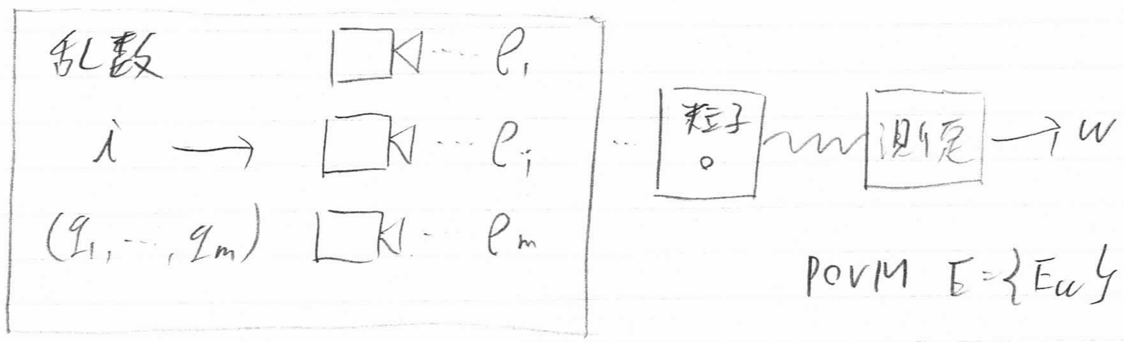
$\sum_{i=1}^{m} q_i p_i(x)$ を $\{p_i(x)\}_{i=1}^{m}$ の

- 統計的混合 (statistical mixture)
- 凸結合 (convex combination mixture)

という

状態の凸結合

given $\rho_1, \cdots, \rho_m \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$



POVM $E = \{E_w\}$

同時分布

$$p(i, w) = q_i \operatorname{Tr} \rho_i E_w$$

周辺分布

$$p(w) = \sum_{i=1}^{m} p(i, w)$$

$$= \operatorname{Tr} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} q_i \rho_i \right)}_{= \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} E_w$$

$$= \operatorname{Tr} \rho E_w$$

粒子の状態 ρ でうごうする.

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} q_i \rho_i$$

統計的混合

凸結合

量子状態は 隠くし 古典的な混合を合わせた状態

<u>Def</u> $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ について

□ $\rho = q\sigma_1 + (1-q)\sigma_2$

$\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$0 < q < 1$

とするとき ρ を混合状態 (mixed state)

[2つの異なる状態の和で書ける]

No.
Date

□ ρが純粋状態 (pure state)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (ρは混合状態でない)

Thm $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$について以下同値

(1) ρは pure state

(2) $\exists |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ s.t. $\|\psi\| = 1$

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

(3) $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ と shatten 分解したとき

$\lambda_i = 1$となるものがただ1つで 他はゼロ

(4) $\mathrm{rank}\,\rho = 1$

・(2) => (4) => (3) => (2) 明らか

・(1) => (3)

対偶とる $\neg(3) \Rightarrow \neg(1)$ 明らか

・(2) => (1) (省略) (難しいので)

イントロとの関係

$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$が pure state のとき

$\boxed{\rho = |\psi\rangle\langle\psi|}$ ⁓ $\boxed{\text{測定}} \rightarrow \omega$

No.
Date

イントロとの関係

$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$が pure state のとき

・$\boxed{\rho = |\psi\rangle\langle\psi|}$ ⁓ $\boxed{\text{測定}} \rightarrow \omega$

状態 $E = \{E_\omega\}$ POVM

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

確率 $p(\omega) = \mathrm{Tr}\,\rho E_\omega$

$= \mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) E_\omega$

$= \langle \psi, E_\omega \psi \rangle$

$E \in$ PVM としたものがイントロの公理

逆にイントロの公理から2章の公理が言える.

2-4 同時測定可能性

作用素の関数

A: エルミート

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 関数

$f(A)$を以下で定義する

$A = \sum_{i=1}^{k} a_i E_i$ (スペクトル分解)

$$f(A) := \sum_{i=1}^{k} f(a_i) E_i$$

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

となる関数が作れる (Lagrange 補完)

$$f_i(x) = \frac{\prod_{l=1, l\neq i}^{k} (x - a_l)}{\prod_{l=1, l \neq i}^{k} (a_i - a_l)}$$

これを用いて

$f_i(A) = E_i$ となる.

1-6-7K 10日目

Review

2-4

○ エルミート作用素の関数

$A = \sum_i a_i E_i$ スペクトル分解 (a_i eigen value)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\rightsquigarrow f(A) := \sum_i f(a_i) E_i$$

$$A^2 = A \times A = \left(\sum a_i E_i\right)\left(\sum a_j E_j\right)$$

$$= \sum_{i,j} a_i a_j \underbrace{E_i E_j}_{\delta_{ij} E_i}$$

(射影なので2重にしても同じ)

$$= \sum_i a_i^2 E_i$$

同様に $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n} = \sum_i a_i^n E_i$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \longrightarrow f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_i a_i^n E_i$$

形式的テーラー展開

$$= \sum_i \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_i^n\right)}_{f(a_i)} E_i$$

□ $f_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$

となる関数 f_j ($j = 1, 2, \cdots$) が存在する. (多項式)

これを用いて $f_j(A) = E_j$

No.

Date

<u>Thm</u> $A = \sum_i a_i E_i$

$B = \sum_j a_j F_j$

エルミート作用素のスペクトル分解

このとき以下は同値

(1) A と B は可換 $(AB = BA)$

(2) $\forall i \forall j$ について E_i と F_j は可換

(3) $\exists$ PVM $\{G_{ij}\}$ s.t. $E_i = \sum_j G_{ij}$

$F_j = \sum_i G_{ij}$

(証明)

(1) ⇒ (2)

$E_i = f_i(A)$, $F_j = g_j(B)$

となる多項式が存在するので

$$E_i F_j = \sum_{m,n} C_{mn} A^m B^n \text{ の形}$$

$$= \sum C_{mn} B^n A^m$$

$$= F_j E_i$$

(1) AB は可換

No.

Date

(2) ⇒ (3)

E_i と F_j が可換なとき

$G_{ij} = E_i F_j$ は射影子

$\because$ $G_{ij}^* = (E_i F_j)^*$

$= F_j^* E_i^*$

$= F_j E_i$

$= E_i F_j$

$= G_{ij}$ エルミート

$G_{ij}^2 = (E_i F_j)(E_i F_j)$ $F_j E_i$ は可換

$= E_i^2 F_j^2$

$= E_i F_j$

$= G_{ij}$

さらに $\sum_{ij} G_{ij} = \underbrace{(\sum_i E_i)}_{I} \underbrace{(\sum_j F_j)}_{I} = I$

$\sum_j G_{ij} = \sum_j E_i F_j = E_i$

同様に $\sum_i G_{ij} = \sum_i E_i F_j = F_j$

とれる。

(3) ⇒ (1)

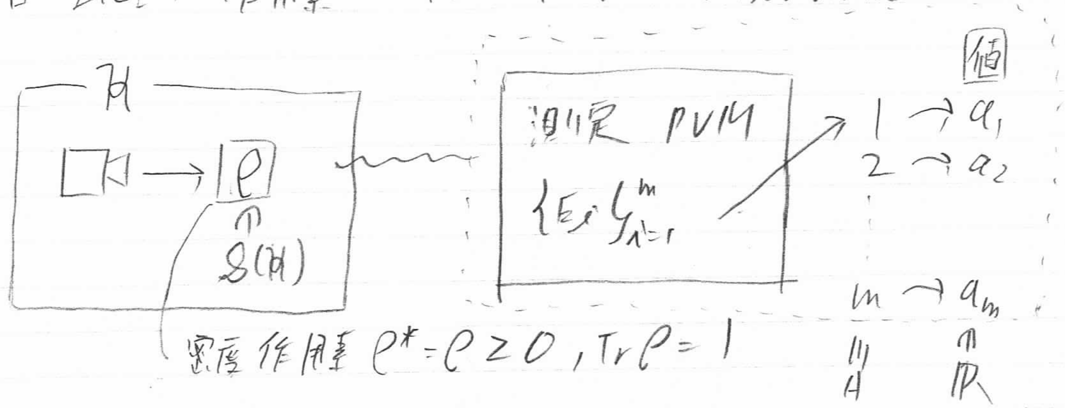
PVM G_{ij} は可換

$$G_{ij}\cdot G_{kl} = \delta_{(i,j),(k,l)}\, G_{ij}$$
$$= G_{kl}\cdot G_{ij}$$

よって A,B は G_{ij} の和で書けるので可換 □

Remark 物理的な意味

□ エルミート作用素 = オブザーバブル observable



a_i ($i=1\cdots m$) が得られる確率

$$\mathrm{Tr}\rho E_i = P(i)$$

期待値

$$\sum_i a_i P(i) = \sum_i a_i \mathrm{Tr}\rho E_i$$
$$= \mathrm{Tr}\rho\Big(\underbrace{\sum_i a_i E_i}_{A\ \text{エルミート}}\Big)$$
$$= \mathrm{Tr}\rho A$$

3、合成系

3-1 テンソル積空間

Def $\begin{cases} \text{ベクトル空間 } V_1, V_2 \\ \quad〃 \qquad W \end{cases}$

に対して $(\varphi,\psi)\longmapsto\varphi\otimes\psi$

$\otimes : V_1\times V_2 \to W$

が以下の条件をみたすとき $(W,\otimes)$ をテンソル積空間という。

(1) ⊗ は bilinear (双線形)

i.e. ・$\forall\psi\in V_2$, $\varphi_1 \longmapsto \varphi_1\otimes\psi$ は線形

・$\forall\varphi\in V_1$, $\psi_2 \longmapsto \varphi\otimes\psi_2$ は線形

(2) V_1 の基底 $\{u_i\}$

V_2 の基底 $\{v_j\}$ に対して

$u_i\otimes v_j\in W$ は W の基底

要は $W=\{\sum_{ij} c_{ij}\, \overset{\text{形式的}}{\boxed{u_i\otimes v_j}} \mid c_{ij}\in\mathbb{C}\}$

形式的に $u_i\otimes v_j$ を基底としたベクトル空間が W

Remark

(1) V_1, V_2 に対してテンソル積空間は一意に存在

(2) テンソル積空間は本質的に一意

本質的に一意なので $W = V_1 \otimes V_2$ と書く

例 $V_1 = \mathbb{C}^2$, $V_2 = \mathbb{C}^3$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$x \otimes y = \begin{pmatrix} x_1 y \\ x_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_1 y_3 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_2 y_3 \end{pmatrix}$$

クロネッカー積

$\mathbb{C}^2$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{C}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ の基底 6つ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

一般に

$$\dim V_1 \otimes V_2 = \dim V_1 \cdot \dim V_2$$

Def $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Hilbert空間

内積 $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{H}_1}$, $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{H}_2}$

に対して, 以下をみたす, $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の内積が一意に存在

$$\langle \varphi \otimes \psi, \varphi' \otimes \psi' \rangle = \langle \varphi, \varphi' \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi, \psi' \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

これにより $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ は Hilbert空間になる

$(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \langle\ ,\ \rangle)$

を Hilbert空間 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ のテンソル積という

例 $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$ 自然内積

$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ に $\underbrace{\text{内積が定まる}}_{\mathbb{C}^6 \text{の自然内積}}$

No.
Date

3-2 作用素のテンソル積

<u>Def</u> $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilbert空間

$\rightsquigarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert空間

作用素 $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ (正方行列), $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$

に対して $(A \otimes B)(\varphi \otimes \psi) = (\underset{\in \mathcal{H}_1}{A\varphi}) \otimes (\underset{\in \mathcal{H}_2}{B\psi})$

で 作用素 $(A \otimes B) : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

が定義される. (∵ 基底の行き先が定まる)

<u>例</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}B & a_{12}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B \end{array}\right)$

6×6 行列

行列のクロネッカー積

No.
Date

20 12
29 13
3
8 10
17

1-13-水 11日目

3-2 作用素のテンソル積

$|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_1, \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$

$A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$

linear

$B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$

linear

$(A \otimes B)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) = A|\varphi\rangle \otimes B|\psi\rangle$

$\in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 基底の行き先が決まる

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$ m×m 行列

$B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}$ n×n 行列

$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{1m}B \\ a_{m1}B & a_{mm}B \end{bmatrix}$

クロネッカー積 mn×mn 行列

No.

Date

作用素のテンソル積の性質

(1) $(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$

(2) $(A\otimes B)^* = A^*\otimes B^*$　エルミート共役

(3) $A\geq 0$, $B\geq 0$ （非負定値）

$A\otimes B \geq 0$

(4) $\mathrm{Tr}(A\otimes B) = (\mathrm{Tr}\,A)(\mathrm{Tr}\,B)$

(5) $A|\varphi\rangle = a|\varphi\rangle$, $B|\psi\rangle = b|\psi\rangle$

$(A\otimes B)(|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle) = \underbrace{ab}_{\text{固有値}}\ \underbrace{|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle}_{\text{固有ベクトル}}$

(6) [(1)の特別な場合]

$\underbrace{|e\otimes f\rangle}_{\text{ベクトル}}\langle g\otimes h|$　ランク1の作用素　省略形

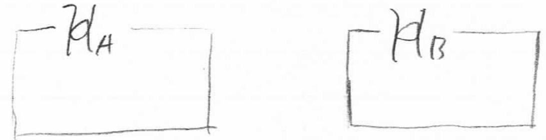
$= (|e\rangle\otimes|f\rangle)(\langle g|\otimes\langle h|)$　正式な形

$= (|e\rangle\langle g|\otimes|f\rangle\langle h|)$

No.

Date

3-3 合成系



合成系の公理

(1) Hilbert空間 $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ で表される二つの系の合成系は $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$ で表される

(2) $\begin{cases} \text{系}A\ \ \text{状態}\ \underbrace{\rho_A}_{\text{密度作用素}} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \\ \text{系}B\ \ 〃\ \ \rho_B \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B) \end{cases}$

独立に準備されているとき合成系の状態 $\underbrace{\rho_A\otimes\rho_B}_{\text{の}\ \mathcal{S}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)}$

$\rho_A\otimes\rho_B$ は密度作用素

(!) $\rho_A\geq 0$, $\rho_B\geq 0 \Rightarrow \rho_A\otimes\rho_B\geq 0$　(3)

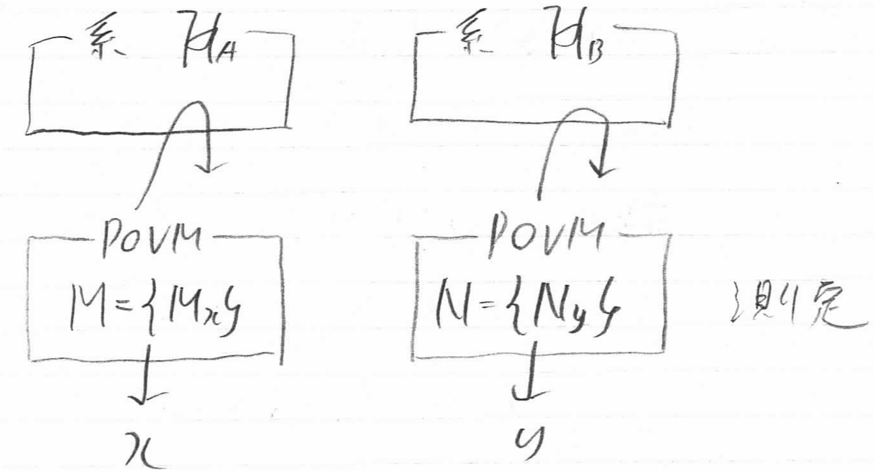
$\rho_A=\rho_A^*$ $\rho_B=\rho_B^* \Rightarrow (\rho_A\otimes\rho_B)^* = \rho_A\otimes\rho_B$　(2)

$\mathrm{Tr}(\rho_A\otimes\rho_B) = (\mathrm{Tr}\,\rho_A)(\mathrm{Tr}\,\rho_B) = 1$

c.f. $P_X(x)$, $P_Y(y)$

独立な分布 $P_X(x)P_Y(y) = P_{XY}(x,y)$

(3)



合成系のPOVMとして

$X_{xy} = \underline{M_x \otimes N_y}$ で測定が表される。

$X=\{X_{xy}\}$

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上の作用素

例 特に状態が $\rho_A \otimes \rho_B$ のとき

測定結果 (x,y) になる確率

$$P(x,y) = \mathrm{Tr}(\rho_A \otimes \rho_B)(M_x \otimes N_y) \quad \text{公理}$$
$$= \mathrm{Tr}\left[(\rho_A M_x) \otimes (\rho_B N_y)\right]$$
$$= (\mathrm{Tr}\,\rho_A M_x)(\mathrm{Tr}\,\rho_B N_y)$$
$$= P(x)\ P(y)$$

(独立な分布)

特に 何もしない測定

(測定しない) POVM $\{I\}$

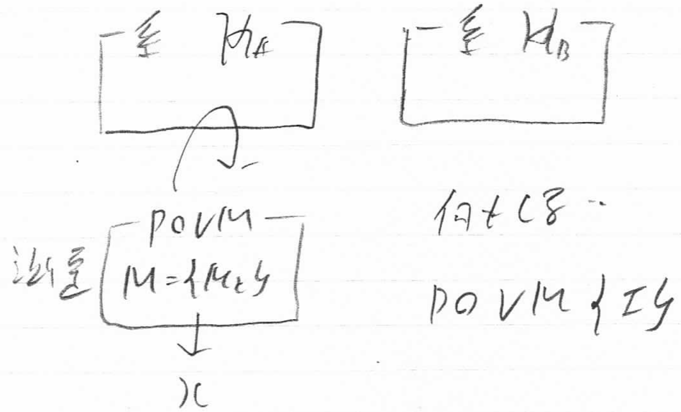
確率 $\mathrm{Tr}\,\rho I = 1$

(針が動かない)

系 $\mathcal{H}_A$ POVM $M=\{M_x\}$

系 $\mathcal{H}_B$ 何もしない

(POVM $\{I\}$)



合成系のPOVMとして

$X_x = M_x \otimes I$

以下では合成系上の状態の分類

$\{\rho \otimes \sigma \mid \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A), \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)\}$

積状態, 独立な状態.

pure ∪ pure
pure state の凸結合

$\{\rho\otimes\sigma \mid \rho\in S(\mathcal{H}_A),\ \sigma\in S(\mathcal{H}_B)\}$

$\subset \{\underbrace{\sum_i p_i \rho_i\otimes\sigma_i}_{\text{凸結合}} \mid \rho_i\in S(\mathcal{H}_A),\ \sigma_i\in S(\mathcal{H}_B)\ \{p_i\}\text{確率}\}$

(separable state)

$\subset S(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$

separable state でない状態を entangle state

エンタングル状態

(量子もつれ)

remark 測定についても同様の分類がある.

3-4 部分トレース (partial trace)

確率 $p(x,y)$ 同時分布

周辺分布 $\begin{cases} p(x) = \sum_y p(x,y) \\ p(y) = \sum_x p(x,y) \end{cases}$

量子状態 $\rho_{AB}\in S(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$

部分トレース $\begin{cases} \rho_A = \mathrm{Tr}_B\,\rho_{AB} \\ \rho_B = \mathrm{Tr}_A\,\rho_{AB} \end{cases}$ 計算方法

$X_{AB}\in \underbrace{\mathcal{L}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)}_{\shortparallel}$

[$\mathcal{L}(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の線形作用素全体]

に対して以下のように部分トレースを定義

$\mathrm{Tr}_B:\ X_A\otimes X_B \longmapsto \underbrace{(\mathrm{Tr}\,X_B)}_{\mathbb{C}} X_A$

$X_A\otimes X_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B) \longmapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \ni X_A$

これで $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$ の任意の作用素 X_{AB} の行先を定義したことになる.

(∵) $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ 上の任意の作用素

$X_A = \sum x_{ij} |e_i^A\rangle\langle e_j^A|$

$|e_i^A\rangle$: CONS

$|e_i^A\rangle\langle e_j^A| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ の基底

No.

Date

同様に

$|e_k^B\rangle\langle e_l^B|$ $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ の基底

$|e_k^B\rangle$ CONS on $\mathcal{H}_B$

$\mathcal{L}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$ の基底は

$\{|e_i^A\rangle\langle e_j^A|\otimes|e_k^B\rangle\langle e_l^B|\}$

(それぞれの基底のテンソル)

よって任意の $X_{AB}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$ は

$$X_{AB}=\sum_{ijkl} x_{ijkl}|e_i^A\rangle\langle e_j^A|\otimes|e_k^B\rangle\langle e_l^B|$$

基底の行き先で定まってる.

<u>Lem</u> $\forall X_{AB}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$

$\forall Y_A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$

$$\mathrm{Tr}[(X_{AB})(Y_A\otimes I_B)]$$
$$=\mathrm{Tr}[(\mathrm{Tr}_B X_{AB})Y_A]$$

∵ $X_{AB}=X_A\otimes X_B$ のとき

確かめればよい (全て同じ)

$$(\text{左辺})=\mathrm{Tr}[(X_A\otimes X_B)(Y_A\otimes I_B)]$$
$$=\mathrm{Tr}[X_AY_A\otimes X_B]$$
$$=(\mathrm{Tr}\,X_AY_A)(\mathrm{Tr}\,X_B)$$
$$(\text{右辺})=\mathrm{Tr}[\{\mathrm{Tr}_B(X_A\otimes X_B)\}Y_A]$$
$$=(\mathrm{Tr}\,X_B)(\mathrm{Tr}\,X_AY_A)$$
$$=(\text{左辺})$$ □

物理的意味

$\rho_{AB}\in\mathcal{S}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B)$

□ partial trace の性質

(1) $\mathrm{Tr}(\underbrace{\mathrm{Tr}_B X_{AB}}_{\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)})=\mathrm{Tr}\,X_{AB}$

Aのトレース　　全体ABのトレース

(2) $(\mathrm{Tr}_B X_{AB})^*=\mathrm{Tr}_B X_{AB}^*$

(3) $X_{AB}\geq 0\implies\mathrm{Tr}_B X_{AB}\geq 0$

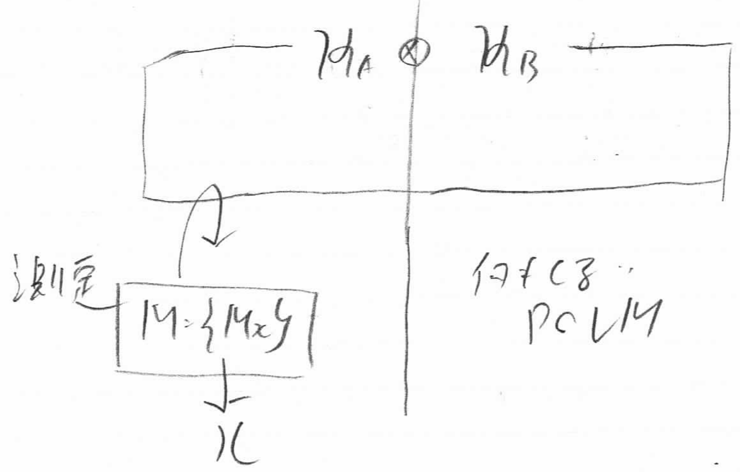
これより

$\rho_A:=\mathrm{Tr}_B\,\rho_{AB}\in\mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$ 　　$\rho=\rho^*\geq 0$

(1)(2)(3)　　　　Tr 1

$\rho_B:=\mathrm{Tr}_A\,\rho_{AB}\in\mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$

合成系



合成系上 POVM $\{M_x \otimes I\}$
測定値 x を得る確率

$$p(x) = \mathrm{Tr}\, \rho_{AB} (M_x \otimes I)$$
$$\underset{\mathrm{Lem}}{=} \mathrm{Tr}\, \underbrace{(\mathrm{Tr}_B \rho_{AB})}_{=\rho_A} M_x$$

$\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB}$ は 系Aだけを考えるときの系Aの状態
記述をAで閉じさせる

3-6 特異値分解 ー極分解

Def $V: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ が isometry (等距離作用素)
$\Leftrightarrow$ $\forall x, y \quad \langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$

例 ユニタリ $\Rightarrow$ isometry　(ユニタリの直和 回転させる)
ユニタリのときとる…

$$\begin{cases} U^*U = I & V^*V = I \\ UU^* = I & (VV^* \neq I) \end{cases}$$

V: isometry $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$ $\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$
$\Leftrightarrow$ $\forall x, y$ $\langle x, V^*Vy \rangle = \langle x, y \rangle$
$\Leftrightarrow$ $V^*V = I$

例 $V: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ (3×2)

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　CONSの行先
直交
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　Isometry

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

No.
Date

Lem $A: \mathcal{H} \to K \supset \mathrm{Im}A$
$B: \mathcal{H} \to K' \supset \mathrm{Im}B$ $\searrow V'$

$A^*A = B^*B \iff \exists V: K \to K'$ isometry

証明

$\Leftarrow$ は明らか

$B^*B = A^*V^*VA = A^*IA = A^*A$

$\Rightarrow$ $V': \mathrm{Im}A \to \mathrm{Im}B$

$\quad\quad y = Ax \longmapsto Bx$

□ 写像になること

$y = Ax = Ax'$ のとき

$Bx = Bx'$ となる

(∵) $\|B(x-x')\|^2$

$= \langle B(x-x'), B(x-x') \rangle$

$= \langle x-x', B^*B(x-x') \rangle$

$= \langle x-x', A^*A(x-x') \rangle$

$= \langle A(x-x'), A(x-x') \rangle$

$= 0$

□ V' が線形であることは明らか

No.
Date

□ $V': \mathrm{Im}A \to \mathrm{Im}B$ の isometry
$\quad\quad \mathrm{Im}A \subset K$, $\mathrm{Im}B \subset K'$

(∵) $\langle V'y_1, V'y_2 \rangle$ $\quad y_1, y_2 \in \mathrm{Im}A$, $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$

$= \langle Bx_1, Bx_2 \rangle$ (V' の定義)

$= \langle x_1, B^*Bx_2 \rangle$

$= \langle x_1, A^*Ax_2 \rangle$

$= \langle Ax_1, Ax_2 \rangle$

$= \langle y_1, y_2 \rangle$

□ 線形写像の拡張により、

$V: K \to K'$ isometry

$V|_{\mathrm{Im}K} = V'$ とできる

□ 定義より

$V\underbrace{Ax}_{\in \mathrm{Im}A} = V'Ax = Bx \quad (\forall x \in \mathcal{H})$

よって $VA = B$ □

No.
Date

Thm (特異値分解)　　　任意の行列の対角化

任意のA : $\mathcal{H} \to K$ に対し　$\dim \mathcal{H} = n$　$\dim K = m$

$\begin{cases} \{|e_i\rangle\} : \mathcal{H} \text{ の CONS} \\ \{|f_a\rangle\} : K \text{ の CONS} \end{cases}$

を固定する.

$\exists U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ユニタリ

$\exists V : K \to K$ ユニタリ

$\exists \Lambda : \mathcal{H} \to K,\ \Lambda|e_i\rangle = \lambda_i |f_i\rangle$

$(i = 1 \cdots n)$　　$\lambda_i \geq 0$

$A = U \Lambda V$ と書ける.

行列の場合

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U}\ \underset{m\times n}{\Lambda}\ \underset{n\times n}{V}$$

$$= U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \theta \\ & \lambda_2 & \\ \theta & & \ddots \end{pmatrix} V$$

← 行と列 ヨコ長の場合 も 対角に λ_i

λ_i は正の実数

$\{\lambda_i\}$: Aの特異値

singular value

No.
Date

証明

$A^* A \geq 0$ より　　(AはエルミートI)

$A^* A = \sum \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i|$　　$\begin{pmatrix} A : \mathcal{H} \to K \\ B : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \end{pmatrix}$

固有値分解　$\lambda_i \geq 0$

$B = \sqrt{A^* A} = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\, |a_i\rangle\langle \underset{\mathcal{H}}{\underset{\cap}{a_i}}|$　　(Bはエルミート)

$B^* B = B^2 = A^* A$

よって Isometry $V : K \to \mathcal{H}$ が存在して. $B = VA$ (*)

$B = VA$

$V^* B = V^* V A = A$

$\therefore\ A = V^* B$

$= \sum \underbrace{\sqrt{\lambda_i}}_{\lambda_i} V^* |a_i\rangle\langle a_i|$

$\{|a_i\rangle\}$ CONS on $\mathcal{H}$

(拡張より)→ $\{V^* |a_i\rangle\}$ CONS on K

$V^* : \mathcal{H} \to K$

よってユニタリ U^* :　$V^*|a_i\rangle \longrightarrow |f_i\rangle$

U' :　$|a_i\rangle \longrightarrow |e_i\rangle$

を使って

No.

Date

$\underbrace{U^* A U'^*}_{\Lambda} = \sum_i \lambda_i |f_i\rangle\langle e_i|$ とできる

Λ とおく

$\Lambda |e_i\rangle = \lambda_i |f_i\rangle$

$A = U \Lambda U'$ と書ける □

Thm (極分解)

$A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ について

$A = V^* \sqrt{A^* A}$ と書ける

(V^* は isometry)

[$|A| = \sqrt{A^* A}$ と書く

○ 行列

× 行列値]

$A = V^* |A|$

$\mathbb{C} \ni z = e^{i\theta} |z|$ ↑ 行列版

No.

Date

3-7 エンタングルメントの分類 ($\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = n$ とする)

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$\|\psi\| = 1$ 状態ベクトル ($\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 密度行列

$\mathrm{Tr}\,\rho = \langle\psi|\psi\rangle = 1$

純粋状態)

$|e_i\rangle$ CONS on $\mathcal{H}_A$

$|f_j\rangle$ CONS on $\mathcal{H}_B$

テンソル積空間の定義より

$|\psi\rangle = \sum_{ij} a_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$

と書ける.

Thm $\exists |e_i\rangle$ CONS, $|f_j\rangle$ CONS

$\exists \lambda_i \geq 0$

$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$

と書ける (Schmidt 分解)

□ λ_i $(i = 1 \cdots S)$ Schmidt 係数

□ S : Schmidt ランク

No.

Date

Def

$$|\Phi_0\rangle = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$$

$n = \dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B$ とおく

$\|\Phi_0\| = \sqrt{n}$

Lem

$$f : \underset{\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)}{\overset{\cap}{A}} \longmapsto \underset{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B}{\overset{\cap}{f(A)}} = (A \otimes I)|\Phi_0\rangle$$

は 線形同型写像　線形 全射, 単射

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \simeq \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

□ 線形であることは明らか

$$f(aA + bB)$$
$$= (aA + bB) \otimes I \, |\Phi_0\rangle$$
$$= a(A \otimes I)|\Phi_0\rangle + b(B \otimes I)|\Phi_0\rangle$$
$$= a\,f(A) + b\,f(B)$$

□ 全射なること　成分行列

$A = \sum_{ij} a_{ji} |e_j\rangle\langle e_i|$ と表す

$$A|e_i\rangle = \sum_j a_{ji} |e_j\rangle$$

No.

Date

$$f(A) = (A \otimes I)|\Phi_0\rangle$$
$$= \sum A|e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$$
$$= \sum_i \sum_j a_{ji} \underbrace{|e_j\rangle \otimes |f_i\rangle}_{\text{CONS}}$$

a_{ij} を任意に動かすて $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ の任意のベクトルが作れる. $\mathrm{Im} f = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ (全射)

□ 単射であること

$$f(A) = 0 \iff \forall ij \;\; a_{ij} = 0$$
$$\iff A = 0 \rightsquigarrow \ker f = \{0\}$$

一般に

f: 単射 $\iff \ker f = \{0\}$ □

f の性質

$T: \underset{\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)}{\overset{\cap}{A}} = \sum_{ij} a_{ji} |e_j\rangle\langle e_i| \overset{\text{転置}}{\longleftrightarrow} \underset{\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)}{\overset{\cap}{A^T}} = \sum a_{ij} |f_j\rangle\langle f_i|$

とおくと

$$f(A) = (A \otimes I)|\Phi_0\rangle = (I \otimes A^T)|\Phi_0\rangle$$

∵

No.

Date

① $(\Sigma D) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} |e_j\rangle \otimes |f_i\rangle$

$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$ $(i \leftrightarrow j)$

$A^T |f_i\rangle = \sum a_{ij} |f_i\rangle$

よって

$(I \otimes A^T)|\Phi_0\rangle = \sum_i |e_i\rangle \otimes A^T |f_i\rangle$

$= \sum_i \sum_j a_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$

$= (\Sigma D)$ □

Schmidt 分解の証明

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$\exists A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ $\quad \underset{(A\otimes I)|\Phi_0\rangle}{\underset{\parallel}{\tau(A)}} = |\psi\rangle$

ここで A の特異値分解を

$A = U\Lambda V$ とする $\quad \Lambda |e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle$ とする

$|\psi\rangle = (A \otimes I)|\Phi_0\rangle$

$= (U\Lambda V \otimes I)|\Phi_0\rangle$

$= (U\Lambda \otimes I)(V \otimes I)|\Phi_0\rangle$

No.

Date

$= (U\Lambda \otimes I)\underbrace{(V \otimes I)|\Phi_0\rangle}_{\underset{(I \otimes V^T)|\Phi_0\rangle}{\parallel}}$

$= (U\Lambda \otimes V^T)|\Phi_0\rangle$

$= \sum_i U\Lambda |e_i\rangle \otimes V^T |f_i\rangle$

$= \sum_i \lambda_i \underbrace{U|e_i\rangle}_{\underset{\text{CONS}}{|e_i'\rangle}} \otimes \underbrace{V^T|f_i\rangle}_{\underset{\text{CONS}}{|f_i'\rangle}}$

U, V ユニタリ

V^T

S: 非ゼロの λ_i の個数

(A で定まる)

$\Updownarrow$ $\quad$ $\underline{1:1}$

$|\psi\rangle$ で定まる

状態ベクトルなので $\sum_i \lambda_i^2 = 1$

□

シュミット分解とエンタングルメントの分類

S の値

No.
Date

1-27-水　13回目

review

Schmidt 分解

$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$(\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ pure state$)$

$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\, |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle.$

となる　CONS $\{|e_i\rangle\}$ on $\mathcal{H}_A$

CONS $\{|f_i\rangle\}$ on $\mathcal{H}_B$

$\lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$

$1 \leq s \leq \dim \mathcal{H}_A \ (= \dim \mathcal{H}_B)$

schmidt ランク

- 作り方（証明）より分解は一意（sも一意）
- Schmidt rank = 1 のとき　（エンタングルしてる…）

$|\psi\rangle = |e_1\rangle \otimes |f_1\rangle$　テンソル積状態

- Schmidt rank ≥ 2 のとき　（エンタングルしている）

テンソル積の形(s=1)に書けない

- schmidt rank によりエンタングルメントが判定できる
- 特別な状態

No.
Date

特別な状態

$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$

$(\lambda_i = \frac{1}{n}, \ s = n = \dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B)$

これを Maximally entangled state

（最大エンタングル状態）

Maximally entangled state の性質

- $\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$

$(A \otimes I)|\Phi\rangle = (I \otimes A^T)|\Phi\rangle$

$|\Phi_0\rangle = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$

$(A \otimes I)|\Phi_0\rangle = (I \otimes A^T)|\Phi_0\rangle$

を示して

Lem

任意のCONS $|e_i\rangle$ on $\mathcal{H}_A$ に対して

CONS $|f_i'\rangle$ on $\mathcal{H}_B$ が存在して

$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle \otimes |f_i'\rangle$

T 転置
* 複素共役
† T*

(証明) CONS の性質より

$|e_i'\rangle = U|e_i\rangle$

となる ユニタリ $U\ (\in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A))$ が存在

U: ユニタリ on $\mathcal{H}_A$ $\longrightarrow$ U^T: ユニタリ on $\mathcal{H}_B$

$$\begin{cases} U^T(U^T)^* = (UU^*)^{*T} = I \\ (U^T)^* U^T = I \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(U\otimes (U^T)^*)|\Phi\rangle \\ &= (I\otimes U^{T*})(U\otimes I)|\Phi\rangle \\ &= (I\otimes U^{T*})(I\otimes U^T)|\Phi\rangle \\ &= |\Phi\rangle \end{aligned}$$

よって $|f_i'\rangle = U^{T*}|f_i\rangle$ と取ればよい □

測定

任意の CONS $|e_i\rangle$ on $\mathcal{H}_A$

$\leadsto E_i = \underline{|e_i\rangle\langle e_i|}$ 射影子

$\{E_i\}$ は PVM (射影測定) ($\sum E_i = I$)

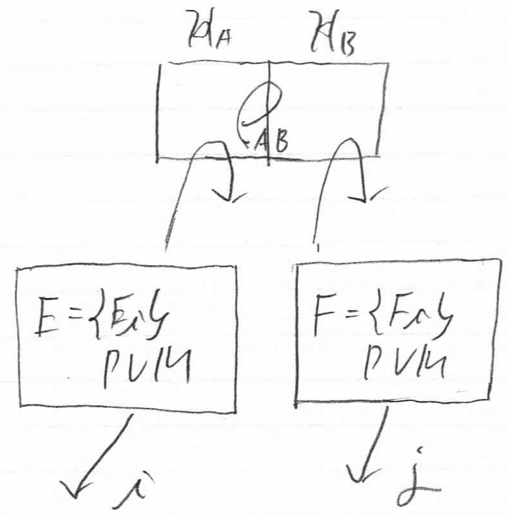
同様にして

CONS $|f_i\rangle$ が存在して

$\leadsto F_i = |f_i\rangle\langle f_i|$

$F = \{F_i\}$ PVM

$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\otimes|f_i\rangle$ 自由に選べる



$\rho_{AB} = |\Phi\rangle\langle\Phi|$

$|\Phi\rangle$: MES

ρ_{AB} は密度作用素.

測定値 (i, j) を得る確率

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{n} & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

系Aで測定値iを得たとき、
状態は次の変化をする　（公理より）

$(E_i \otimes I)\rho(E_i \otimes I)$

$=$

$= |e_i\rangle\langle e_i| \otimes |f_i\rangle\langle f_i|$

- これは(Aさん)にとっての状態
- (Bさん)にとって、測定値を知らなければ、状態は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} |e_i\rangle\langle e_i| \otimes |f_i\rangle\langle f_i| = \rho'_{AB}$$

凸結合

ここで

$\mathrm{Tr}_A \rho_{AB} = \frac{1}{n} I_B$
（Aの観測前）

$\mathrm{Tr}_A \rho'_{AB} = \frac{1}{n} I_B$
（Aの観測後）

結局　系Bに統計的性質は変わらない

4、量子情報理論

4-1　von Neuman entropy

$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$: Hilbert sp.

$H(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho \log \rho$

$\left[\log\rho : \quad f(x) = \log x \to f(\rho) \right]$

$\log\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$　　行列の関数

ここで　$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

$n = \dim\mathcal{H}$ (shatten分解、固有値分解)

$$H(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log \lambda_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

これは固有値のShannonエントロピー

$$\rho = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|}_{= I}$$

No.

Date

$H(\rho)$ の性質 (← Shannon entropy)

(1) $H(\rho) \geq 0$

等号成立 $\Longleftrightarrow \exists i_0 \begin{cases} \lambda_{i_0} = 1 \\ \lambda_i = 0 \end{cases} \quad (i \neq i_0)$

$\Longleftrightarrow$ ρ は pure state

($\rho = |\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|$ の形)

(2) $H(\rho) \leq \log \underbrace{\dim \mathcal{H}}_{n}$

等号成立 $\Longleftrightarrow$ λ_i が一様分布

$\Longleftrightarrow \rho = \frac{1}{n} I$

(3) $\rho_{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$

$\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB}, \quad \rho_B = \mathrm{Tr}_A \rho_{AB}$

$H(\rho_{AB}) \leq H(\rho_A) + H(\rho_B)$

(劣加法性) (証明略)

cf. 強劣加法性

$H(\rho_{AB}) + H(\rho_{BC}) \leq H(\rho_{ABC}) + H(\rho_B)$

No.

Date

(4) $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$ pure

$\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB} \quad \rho_B = \mathrm{Tr}_A \rho_{AB}$

のとき

$H(\rho_A) = H(\rho_B)$

$\boxed{\rho_{AB} \text{ pure}}$ (entropy exchange)

$H(\rho_A) = H(\rho_B)$

(証明) Schmidt 分解

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{s} \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$$

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$$

$$= \sum_i \sum_j \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} |e_i\rangle\langle e_j| \otimes \underbrace{|f_i\rangle\langle f_j|}_{\text{ここにのトレース}}$$

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho_{AB} = \sum_i \sum_j \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} |e_i\rangle\langle e_j| \delta_{ij}$$

$$=$$

$$= \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

$$\rho_B = \mathrm{Tr}_A \rho_{AB}$$

$$= \sum_i \sum_j \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} \delta_{ij} |f_i\rangle\langle f_j|$$

$$= \sum_i \lambda_i |f_i\rangle\langle f_i|$$

No.
Date

よって

(ρ_Aの固有値) = (ρ_Bの固有値)

合成系が pure state のとき成り立つ

よって $H(\rho_A) = H(\rho_B)$ $\square$

4-2 量子相対エントロピー

Def. $\rho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$

$D(\rho \| \sigma) = \mathrm{Tr}\rho(\log\rho - \log\sigma)$

(注) $\log\frac{p(x)}{q} = \log p(x) - \log q(x)$

$\log\rho - \log\sigma$, $\log\rho\sigma^{-1}$, $\log\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho\sigma^{-\frac{1}{2}}$

は全て異なる.

予告 $\rho = \sum_i \lambda_i E_i$

$\sigma = \sum_j \mu_j F_j$ 固有値分解

$p(i,j) = \mathrm{Tr}\rho E_i F_j$

$q(i,j) = \mathrm{Tr}\sigma E_i F_j$ 確率

$D(\rho \| \sigma) = D(p \| q)$

No.
Date

2-10-火 14日目

レポート

1. U, V, W

線形空間

$f: U \to V$

$g: V \to W$ 線形写像

(1) $\mathrm{Im}\, g \circ f \subset \mathrm{Im}\, g$ を示せ

合成写像

これより $\dim \mathrm{Im}\, g\circ f \leq \dim g$

すなわち $\mathrm{rank}\, g\circ f \leq \mathrm{rank}\, g$ が成立

(2) $\ker g \circ f \supset \ker f$ を示せ

(3) (2)と次元定理を用いて

$\dim \mathrm{Im}\, g\circ f \leq \dim \mathrm{Im}\, f$ を示せ

(4) (1)と(3)を用いて

$\mathrm{rank}\, g\circ f \leq \min\{\mathrm{rank}\, f, \mathrm{rank}\, g\}$ を示せ

2, $P^3 = \{ax^3+bx^2+cx+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

はベクトル空間である。(線形空間)

$\frac{d^2}{dx^2} : P^3 \to P^3$

の基底 $[1, x, x^2, x^3]$ に関する表現行列を求めよ

3, (1) $\mathbb{C}^2$ 上のエルミートかつトレースが1である行列は

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

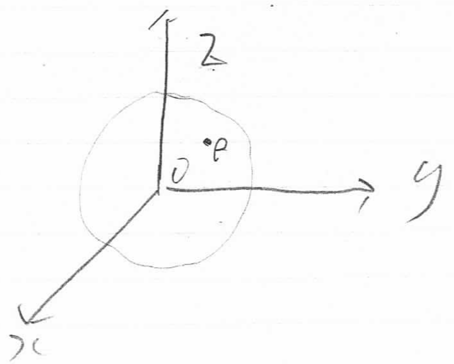
と書けることを示せ

(2) $\rho \geq 0 \iff x^2+y^2+z^2 \leq 1$

を示せ

(固有値を使い OK!)

$\mathbb{C}^2$ の状態 $\approx (x, y, z)$ 単位球体



Bloch 球

4. $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 上のベクトル

$$\frac{1}{2}\{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\}$$

$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$　　$|0\rangle \perp |1\rangle$ CONS ノルム1

を Schmidt 分解せよ

5.

19.A 金曜日まで

No.

Date

続き

量子相対エントロピー

$D(\rho\|\sigma)=\mathrm{Tr}\,\rho(\log\rho-\log\sigma)$

$\rho,\sigma\in\mathcal{S}(\mathcal{H})$

性質

(1) $D(\rho\|\sigma)\geq 0$

等号成立条件 $\Longleftrightarrow$ $\rho=\sigma$

(2) ユニタリ作用素 U に対して

$D(U\rho U^*\|U\sigma U^*)$ (証明しかたこの後あるう…)

$=D(\rho\|\sigma)$

(3) 加法性

$D(\rho_1\otimes\rho_2\|\sigma_1\otimes\sigma_2)$

$=D(\rho_1\otimes\sigma_1)+D(\rho_2\otimes\sigma_2)$

証明

(1) $\rho=\sum_i\lambda_i E_i$ 　固有値分解

$\sigma=\sum_j\mu_j F_j$ 　$\{\lambda_i\},\{\mu_j\}$ に重複ありで

No.

Date

$p(i,j)=\lambda_i\,\mathrm{Tr}\,E_iF_j$

$q(i,j)=\mu_j\,\mathrm{Tr}\,E_iF_j$

とおくと $p(i,j)$, $q(i,j)$ は確率分布になる。

$\because$ $\sum_i\sum_j p(i,j)=\sum_i\lambda_i\,\mathrm{Tr}\,E_i\underbrace{(\sum_j F_j)}_{I}$

$=\mathrm{Tr}(\underbrace{\sum_i\lambda_iE_i}_{\rho})=1$

このとき

$D(\rho\|\sigma)=D(p\|q)$

古典的相対エントロピー

$\because$ $\log\rho=\sum_i\log\lambda_i E_i$

$\log\sigma=\sum_j\log\mu_j F_j$

$D(\rho\|\sigma)$ (左辺)

$=\mathrm{Tr}\,\rho(\log\rho-\log\sigma)$ 　$\rho\log\rho=\sum\lambda_i\log\lambda_i E_i$

$=\sum_i\lambda_i\log\lambda_i\underbrace{}_{\mathrm{Tr}E_i}-\mathrm{Tr}(\sum_i\lambda_iE_i)(\sum_j\log\mu_jF_j)$

$D(p\|q)$ (右辺)

$=\sum_i\sum_j p(i,j)\{\log p(i,j)-\log q(i,j)\}$

$$= \sum_i \sum_j (\lambda_i \mathrm{Tr} E_i F_j) \times \{\log(\lambda_i \mathrm{Tr} E_i F_j) - \log(\mu_j \mathrm{Tr} E_i F_j)\}$$

$$= \sum_i \underbrace{\sum_j \lambda_i (\mathrm{Tr} E_i F_j)}_{I} \log \lambda_i - \sum_i \sum_j \lambda_i \mathrm{Tr} E_i F_j \log \mu_j$$

$$= \sum_i \lambda_i \mathrm{Tr} E_i \log \lambda_i - \sum_i \sum_j \lambda_i \log \mu_j \mathrm{Tr} E_i F_j \quad //$$

よって $D(\rho \| \sigma) = D(P \| Q) \geq 0$

等号成立

$\iff \forall i, \forall j$

$$\lambda_i \mathrm{Tr} E_i F_j = \mu_j \mathrm{Tr} E_i F_j$$

$P(i,j)$ $\quad Q(i,j)$

これより

$\mathrm{Tr} E_i F_j \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = \mu_j$ —①

一方 $\forall i\ \exists j,\ \mathrm{Tr} E_i F_j \neq 0$ —②

∵ 背理法

$\exists i, \forall j\ \ \mathrm{Tr} E_i F_j = 0$ であると

$0 = \sum_j \mathrm{Tr} E_i F_j = \mathrm{Tr} E_i$

$\Rightarrow E_i = 0$ 矛盾

このとき

i に対して $j_1 \neq j_2$ に対して

$\mathrm{Tr} E_i F_{j_1} \neq 0,\ \mathrm{Tr} E_i F_{j_2} \neq 0$

であると ①より $\lambda_i = \mu_{j_1} = \mu_{j_2}$

これは固有値分解の仮定で矛盾

すなわち ②を満たすものが唯一

$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ ← インデックス付け替え

$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_m$ （各 $\lambda_k = \mu_k$）

$n = m$

$\mathrm{Tr} E_i F_j = 0 \quad i \neq j$

これより

$E_i F_j = 0 \quad (i \neq j)$

$E_i = E_i \sum_j F_j$

$= E_i F_i$

No.
Date

$$\begin{cases} F_i = \left(\sum_j E_j\right) F_i \\ \quad = E_i F_i \end{cases}$$

以上より $\rho = \sigma$

(2)の証明

$D(U\rho U^* \| U\sigma U^*) = D(\rho\|\sigma)$ — ㊍

しめしたら

(1) ユニタリ行列 U と関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(U\rho U^*) = U f(\rho) U^*$

を示せ　$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$

(2) 上の性質 ㊍ を示せ

(3)の証明

$\log(\rho_1 \otimes \rho_2)$

$= \log \rho_1 \otimes I + I \otimes \log \rho_2$

∵ $\rho_1 = \sum_i \lambda_i E_i$

$\rho_2 = \sum_j \mu_j F_j$

No.
Date

$\rho_1 \otimes \rho_2 = \left(\sum_i \lambda_i E_i\right) \otimes \left(\sum_j \mu_j F_j\right)$

$= \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \underline{E_i \otimes F_j}$ 射影

$\log(\rho_1 \otimes \rho_2)$

$= \sum_i \sum_j \underbrace{(\log \lambda_i \mu_j)}_{\log \lambda_i + \log \mu_j} E_i \otimes F_j$

$= \sum_i \sum_j \log \lambda_i E_i \otimes F_j + \sum_i \sum_j \log \mu_j E_i \otimes F_j$

$= \log \rho_1 \otimes I + I \otimes \log \rho_2$ //

$D(\rho_1 \otimes \rho_2 \| \sigma_1 \otimes \sigma_2)$

$= \mathrm{Tr}(\rho_1 \otimes \rho_2)\{\underbrace{\log(\rho_1 \otimes \rho_2)}_{\log \rho_1 \otimes I + I \otimes \log \rho_2} - \underbrace{\log(\sigma_1 \otimes \sigma_2)}_{\log \sigma_1 \otimes I + I \otimes \log \sigma_2}\}$

$= \mathrm{Tr}(\rho_1 \otimes \rho_2)\{(\log \rho_1 - \log \sigma_1) \otimes I + I \otimes (\log \rho_2 - \log \sigma_2)\}$

$= \mathrm{Tr}\, \rho_1(\log \rho_1 - \log \sigma_1) \cdot (\mathrm{Tr}\, \rho_2)$

$+ (\mathrm{Tr}\, \rho_1) \cdot \mathrm{Tr}\, \rho_2(\log \rho_2 - \log \sigma_2)$

$= D(\rho_1 \| \sigma_1) + D(\rho_2 \| \sigma_2)$ //

量子相対エントロピーの操作的意味

= 量子仮説検定

$\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}$ 上

$\rho\rho\rho\rho$

$\sigma\sigma\sigma\sigma$ n個 $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{測定}}$ → ρ is true ①

→ σ is true ②

ρ または σ $\in S(\mathcal{H})$

同一の状態を何回も発生

2値測定

POVM

$E_1, E_2 \geq 0$

$E_1 + E_2 = I$

$E_1 = T$ とおいて

$E_2 = I - T$

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\otimes n})$

誤り確率

$$\begin{cases} \alpha_n(T_n) = \mathrm{Tr}\,\rho^{\otimes n}(1 - T_n) \\ \beta_n(T_n) = \mathrm{Tr}\,\sigma^{\otimes n} T_n \end{cases}$$

$\alpha_n(T_n) \leq \varepsilon$ としたときの

$\beta_n(T_n)$ の最適値

$$\beta_n^*(\varepsilon) = \min_{T_n : \alpha_n(T_n) \leq \varepsilon} \beta_n(T_n)$$

Thm. (量子Stein)

$0 < \forall\varepsilon < 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \beta_n^*(\varepsilon) = -D(\rho\|\sigma)$

$\beta_n^*(\varepsilon) \approx e^{-nD(\rho\|\sigma)}$ 大きくてはない
小さくてもない

どうがんばってもこれ以上小さくできる