1. Review of linear algebra

1-1. vector space

V: vector space

example.

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle| \, v_1, v_2, \cdots, v_n \in \mathbb{C} \right\}$$

数ベクトル空間

$$\mathbb{P}_2 = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$ (2次多項式全体)

ベクトル空間

- たし算について閉じている
- スカラー倍について閉じている
- 「ゼロ」がある

たとえば,

たし算

$$\begin{array}{rl} & 2x^2 + 3x + 4 \\ +) & 3x^2 + x - 1 \\ \hline & 5x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{P}_2 \end{array}$$

スカラー倍

$$2(2x^2 + 3x + 4) = 4x^2 + 6x + 8 \in \mathbb{P}_2$$

「ゼロ」

$$0x^2 + 0x + 0 = 0 \in \mathbb{P}_2$$

1-2. 表現行列

$e_1, e_2, \cdots, e_n \in V$

が以下の条件を満たすとき，基底という。

(1) $\forall v \in V$ が

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad (\underset{\text{スカラー}}{v_i} \in \mathbb{C})$$

(2) $e_1, e_2, \cdots, e_n$ が一次独立 (線形独立)

(ムダがない)

$\underline{\text{linear operator}}$ (線形作用素) ≈ 行列

$\underline{\text{例}}$ 微分

$$v = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2 \quad v' = a'x^2 + b'x + c' \quad \overset{v+v'}{=} (a+a')x^2 + (b+b')x + (c+c')$$

(写像) $f \downarrow$ 微分 $\left(\frac{d}{dx}\right)$ $\qquad f \downarrow \qquad f \downarrow$

$$\underset{\substack{\parallel \\ f(v)}}{2ax + b + 0} \qquad \underset{\substack{\parallel \\ f(v')}}{2a'x + b' + 0} \qquad \underset{\substack{\parallel \\ f(v)+f(v') = f(v+v')}}{2(a+a')x + (b+b')}$$

写像
$A : V \to W$

ベクトル空間

が，次の条件を満たすとき 線形作用素 (linear operator)

(1) $\forall v, v' \in V$

$$A(v+v') = A(v) + A(v')$$

(2) $\forall c \in \mathbb{C}$, $\forall v \in V$

$$A(cv) = cA(v)$$

remark

写像では $f(v)$ のようにカッコを付けるが線形作用素では省略

表現行列

$A : V \xrightarrow{\text{linear}} W$

$V : e_1 \cdots e_n$ 基底

$W : f_1 \cdots f_m$ 基底

固定

基底の性質より，$\forall v \in V$ は

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad (v_i \in \mathbb{C}) \quad — ①$$

と一通りに書ける
(ムダがない)

$$v \approx \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{A}} w \approx \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$w = Av$$

$\forall w \in W$

$$w = \sum_{j=1}^{m} w_j f_j \quad (w_j \in \mathbb{C}) \quad — ②$$

V の基底 ($e_1 \cdots e_n$) の A による行先は

$$W \ni Ae_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ji} \underbrace{f_j}_{W\text{の基底}} \quad — ③$$

と必ず一通りに表される。

$$w = Av$$

線形性

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{m} w_j f_j}_{②} = A\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i e_i}_{①}\Big)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} w_j f_j = \sum_{i=1}^{n} v_i A e_i$$

$$\overset{③}{=} \sum_{j=1}^{m} A_{ji} f_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} A_{ji} v_i\Big) f_j$$

ゆえに

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} v_i$$

$\hat{A} = (A_{ji})$ Aの表現行列

$$A[e_1, e_2, \cdots, e_n] := [Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_n]$$

$$= [f_1 \cdots f_m] \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}}_{\hat{A}}$$

(③を書き直した。)

③

$w = Av$

$$\underbrace{[f_1 \cdots f_m]\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}}_{②} = A\underbrace{[e_1 \cdots e_n]\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{①}$$

③

$$= [f_1 \cdots f_m]\,\hat{A}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

よって基底の性質より

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \hat{A}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

1-3 基底の変換

Vの基底 $[e_1 \cdots e_n]$ ← e_i $(i=1\cdots n)$

$[e'_1 \cdots e'_n]$

Wの基底 $[f_1 \cdots f_m]$ ← f_j $(j=1\cdots m)$

$[f'_1 \cdots f'_m]$

e'_k $(k=1\cdots n)$

はVの要素 ⟶ $[e_1 \cdots e_n]$ で書ける。

$$e'_k = \sum_{i=1}^{n} S_{ik} e_i \quad — ④$$

同様に f'_l $(l=1\cdots m)$ も

$$f'_l = \sum_{j=1}^{m} T_{jl} f_j \quad — ⑤$$

と書ける。ブロックで書くと、

$$④\ [e'_1 \cdots e'_n] = [e_1 \cdots e_n]\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \cdots & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \to S$$

$$⑤\ [f'_1 \cdots f'_m] = [f_1 \cdots f_m]\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1m} \\ T_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & \cdots & \cdots & T_{mm} \end{bmatrix} \to T$$

S, T 変換行列

$$A[e_1 \cdots e_n] = [f_1 \cdots f_m]\hat{A} \quad — ⑥$$

Aの表現行列

同様に

$$A\underbrace{[e'_1 \cdots e'_n]}_{④} = \underbrace{[f'_1 \cdots f'_m]}_{⑤}\hat{A}'$$

表現行列

上式は④⑤より、

$$A[e_1 \cdots e_n]S = [f_1 \cdots f_m]T\hat{A}'$$

S^{-1}を両辺に右からかけると

$$A[e_1 \cdots e_n] = [f_1 \cdots f_m]\,T\hat{A}'S^{-1} = \hat{A}$$

基底の変換公式

$$\hat{A} = T\hat{A}'S^{-1} \quad (\hat{A}' = T^{-1}\hat{A}S)$$