復習 リースの表現定理

$f \in \mathcal{H}^* = \{ f : \mathcal{H} \underset{\text{linear}}{\to} \mathbb{C} \}$

dual vector space

$\exists y_f \in \mathcal{H}$

$$f(x) = \langle y_f , x \rangle \quad (x \in \mathcal{H})$$

しかも, y_f は f について一意に定まる。

2-2 歪線形形式 sesqui-linear form (双線形形式)

$\varphi : \underset{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}{\underset{\cap}{(x,y)}} \longmapsto \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{\varphi(x,y)}}$

が内積の条件(1)(2)を満たすもの。

(1) x について反線形, y について線形

(2) $\overline{\varphi(x,y)} = \varphi(x,y)$

(3) $\varphi(x,y) \geq 0$ ← あってもなくても良い

Lem sesqui-linear form φ について

$\underset{\text{operator}}{\exists A}$, $\varphi(x,y) = \langle x , Ay \rangle$

しかも A は φ について一意

$\because$ $f_y(x) := \overline{\varphi(x,y)}$

これは x について線形

$\mathcal{H}^* \ni f_y : |x\rangle \underset{\text{linear}}{\longmapsto} \overline{\varphi(x,y)}$

よって, リースの表現定理より

$$f_y(x) = \langle z_y , x \rangle$$

となる $z_y \in \mathcal{H}$ が存在。このとき,

$$\underset{\mathcal{H}}{\underset{\cap}{y}} \longmapsto \underset{\mathcal{H}}{\underset{\cap}{z_y}}$$

の対応は線形。よって linear operator A があって,

$$z_y = Ay$$

よって,

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(x,y)} &= f_y(x) \\ &= \langle z_y , x \rangle \\ &= \langle Ay , x \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \varphi(x,y) &= \overline{\langle Ay , x \rangle} \\ &= \langle x , Ay \rangle \quad \square \end{aligned}$$

(一意性は省略)

2-3 エルミート共役

<u>例</u> $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $A = [a_{ij}]$

$$\updownarrow \text{ エルミート共役}$$

$$\overline{A}^T = A^* = [\,\overline{a_{ji}}\,]$$

$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, A is linear operator

$\varphi(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ は sesqui-linear form

$$f(x,y) = \overline{\varphi(y,x)} = \overline{\langle y, Ax \rangle} = \langle Ax, y \rangle$$

とおくと, $f(x,y)$ も sesqui-linear. よって

$$\underset{\langle Ax, y\rangle}{\underset{\shortparallel}{f(x,y)}} = \langle x, A^* y \rangle$$

となる A^* が一意に存在, これを A のエルミート共役という

<u>Lem</u>

$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ $(\alpha \in \mathbb{C})$

$(A+B)^* = A^* + B^*$

$(AB)^* = B^* A^*$

2-4 エルミート作用素

<u>Def</u> $A^* = A$ のとき, A をエルミート作用素という。

<u>例</u> $A = \begin{bmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{bmatrix}$ 量子力学では重要

<u>Def</u>

$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, linear operator

$\mathcal{H} \ni x \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ で

$$Ax = \lambda x$$

となるとき, λ を固有値 (eigenvalue), x を固有ベクトル (eigenvector) という。

cf. 対称行列全体 ⊂ エルミート行列全体

<u>対称行列の例</u>

分散共分散行列

確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ (期待値)

$V_{ij} = \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$

$V = [V_{ij}]$ 共分散行列

$V_{ij} = V_{ji}$ 対称行列

($\longrightarrow$ 固有値は実数)

Lem エルミート作用素の固有値は実数

∵ xを固有ベクトル, λを固有値とする。

$$\langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\underline{\langle x, x\rangle}_{\neq 0}$$

一方で

$$\begin{aligned}\langle x, Ax\rangle &= \langle A^* x, x\rangle \quad (\text{エルミート共役のDef}) \\ &= \langle Ax, x\rangle \quad (A^* = A) \\ &= \langle \lambda x, x\rangle \\ &= \bar{\lambda}\underline{\langle x, x\rangle}_{\neq 0}\end{aligned}$$

∴ $\lambda = \bar{\lambda}$となり, $\lambda \in \mathbb{R}$がいえる。

Lem A: エルミート作用素

固有値 $\lambda \neq \mu$

それぞれの固有ベクトル x, y

i.e.(すなわち)

$$Ax = \lambda x,\ Ay = \mu y$$

とする. このとき xとyは直交する

$$\langle x, y\rangle = 0$$

proof

$$\begin{aligned}\langle x, Ay\rangle &= \langle x, \mu y\rangle \\ &= \mu\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x, Ay\rangle &= \langle A^* x, y\rangle \\ &= \langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle \\ &= \lambda\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

辺々引き算

$$0 = (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle$$

$\lambda \neq \mu$より, $\langle x, y\rangle = 0$がいえる。

Thm Aをエルミート作用素とする。$n = \dim \mathcal{H}$とすると, Aの固有値は(重複を許すと)ちょうどn個あり, それらの固有ベクトルを正規直交基底にとることができる。

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ |e_1\rangle & |e_2\rangle & |e_3\rangle & & |e_n\rangle \end{array}$$

Remark 正規直交基底 Orthogonal Normal basis または, Orthogonal Normal base System (ONS)

直交 正規(規格化されている)

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Thm (続き)

$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$　　cf. 行列の対角化

と書ける。(固有値分解 (スペクトル分解))

proof

$\boxed{\text{ONS } |e_1\rangle\ |e_2\rangle \cdots |e_n\rangle \text{ の行先によって作用素は定まる。}}$

$k = 1, \cdots, n,$

$A|e_k\rangle = \lambda_k |e_k\rangle$

一方で

$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|\right)|e_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |e_i\rangle \underbrace{\langle e_i | e_k\rangle}_{= \boxed{\delta_{ik}}}$　クロネッカーのデルタ

$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

$= \lambda_k |e_k\rangle$

ONSの行先が一致したので，OK □

Remark

重複固有値がある場合，この分解は一意でない。

レポート

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ を固有値分解せよ。

締め切り　5/15