復習

$A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{linear}]{} \mathcal{H}$

ONS $|e_i\rangle$ $(i=1\cdots n)$ $n = \dim \mathcal{H}$

$\langle e_i|A|e_i\rangle$ 行列Aの成分

2-7 トレース

<u>Def</u>

$$\mathrm{Tr}\,A := \sum_{i=1}^{n} \langle e_i|A|e_i\rangle$$

TrAは基底の取り方によらず同じ値

∵ $|f_k\rangle$ $k=1\cdots n$ 別のONS

$$\sum_{k=1}^{n}\langle f_k|A|f_k\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle f_k|\underset{\sum_{i=1}^{n}|e_i\rangle\langle e_i|}{I}A\underset{\sum_{j=1}^{n}|e_j\rangle\langle e_j|}{I}|f_k\rangle$$

$$= \sum_i\sum_j\sum_k \langle f_k|e_i\rangle\langle e_i|A|e_j\rangle\langle e_j|f_k\rangle$$

$$= \sum_i\sum_j\sum_k \langle e_j|f_k\rangle\langle f_k|e_i\rangle\langle e_i|A|e_j\rangle$$

$$= \sum_i\sum_j \langle e_j|\underbrace{\left(\sum_k |f_k\rangle\langle f_k|\right)}_{=I}|e_i\rangle\langle e_i|A|e_j\rangle$$

$$= \sum_i\sum_j \underbrace{\langle e_j|e_i\rangle}_{=\delta_{ij}}\langle e_i|A|e_j\rangle$$

$$= \sum_i \langle e_i|A|e_i\rangle$$

<u>トレースの性質</u>

(1) トレースは線形 (線形汎関数)

$\mathrm{Tr}(A+B) = (\mathrm{Tr}\,A)+(\mathrm{Tr}\,B)$

$\mathrm{Tr}(cA) = c(\mathrm{Tr}A)$ $c\in\mathbb{C}$

(2) $\mathrm{Tr}\,AB = \mathrm{Tr}\,BA$ (大事)

(3) $\mathrm{Tr}\,A^* = \overline{\mathrm{Tr}\,A}$

例 $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}a&c\\d&b\end{pmatrix}^* = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix}\bar a&\bar d\\\bar c&\bar b\end{pmatrix} = \bar a+\bar b = \overline{(a+b)}$, $\mathrm{Tr}A = a+b$

(4) Aがエルミートのとき、$\mathrm{Tr}\,A\in\mathbb{R}$

∵ Aがエルミートのとき、

$\langle e_i|A|e_i\rangle\in\mathbb{R}$

∵ $\overline{\langle e_i|A e_i\rangle} = \langle Ae_i|e_i\rangle = \langle e_i|A^*e_i\rangle = \langle e_i|Ae_i\rangle$

(5) $A\geq 0$のとき、$\mathrm{Tr}A\geq 0$

<u>証明</u>

$\boxed{\text{エルミート行列のトレース} = \text{固有値の和}}$

A：エルミート行列

固有値分解、$A = \sum_{k=1}^{n} \underset{\text{固有値}}{a_k}\,\underset{\text{固有ベクトル ONS}}{|e_k\rangle}\langle e_k|$

固有ベクトルによるONS $|e_k\rangle$では

$\langle e_i|A|e_j\rangle = \begin{cases} a_i & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$A \approx \begin{pmatrix} a_1 & & O \\ & a_2 & \\ O & & \ddots\ a_n\end{pmatrix}$

よって $\mathrm{Tr}A = \sum_{k=1}^{n} a_k$

<u>Remark</u>

$\det A = \prod_{k=1}^{n} a_k$

remember

$A \geq 0 \Leftrightarrow$ Aはエルミート かつ 固有値はすべて0以上

よって

$\mathrm{Tr}A = \sum_{k=1}^{n} \overset{\text{ｲﾁ}}{a_k} \geq 0$ □

(5)の等号成立条件

$A \geq 0$ のとき、$\mathrm{Tr}A = 0 \Leftrightarrow A = \overset{\text{0行列}}{O}$

(5)より、

(5') $A \geq B$ ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A - B \geq 0$)

のとき、$\mathrm{Tr}A \geq \mathrm{Tr}B$

$\because$ (5)より $\mathrm{Tr}(A-B) \geq 0$

2-8 Hilbert-Schmidt 内積

$\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \{A \mid A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{linear}]{} \mathcal{H}\}$

$= \{A \mid A : \mathbb{C}^n \xrightarrow[\text{linear}]{} \mathbb{C}^n\}$

$=$ $n \times n$ 正方行列全体 $\leftarrow \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right\}$

$\approx \mathbb{C}^{n \times n}$

$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{H})\text{はベクトル空間}}$

- たし算について閉じている
- スカラー倍について閉じている
- ゼロ元(ゼロ行列)がある

Def HS内積

$A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$\langle\langle A, B \rangle\rangle = \mathrm{Tr}A^*B$　これはベクトル空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の内積

内積であることの確認

◎ $\langle\langle A, \alpha B + \beta C \rangle\rangle$　$A, B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$　$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$= \mathrm{Tr}A^*(\alpha B + \beta C)$

$= \alpha \mathrm{Tr}A^*B + \beta \mathrm{Tr}A^*C$

$= \alpha\langle\langle A, B \rangle\rangle + \beta\langle\langle A, C \rangle\rangle$ ⋯ 右について線形

同様にして

$\langle\langle \alpha A + \beta B, C \rangle\rangle = \overline{\alpha}\langle\langle A, C \rangle\rangle + \overline{\beta}\langle\langle B, C \rangle\rangle$ ⋯ 左について反線形

◎ $\langle\langle A, A \rangle\rangle \geq 0$

等号成立 $\Leftrightarrow A = 0$

証明

$\langle\langle A, A \rangle\rangle = \mathrm{Tr}A^*A$

$= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k | A^*A | e_k \rangle$　$|e_k\rangle$ ONS

$= \sum_{k=1}^{n} \langle Ae_k | Ae_k \rangle$

$= \sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2 \geq 0$

等号成立 $\Leftrightarrow \forall k \; \|Ae_k\| = 0$

$\Leftrightarrow \forall k \; A|e_k\rangle = \vec{0}$ $\Leftrightarrow A = O$

Lemma

$A \geq 0$, $B \geq 0$ のとき

$$\mathrm{Tr}\,AB \geq 0$$

等号成立 $\Longleftrightarrow$ $AB = 0$

証明

$A, B \geq 0$ とすると $\sqrt{A}, \sqrt{B}$ エルミート

$$\mathrm{Tr}\,AB = \mathrm{Tr}\,\boxed{\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}}\boxed{\sqrt{B}}$$

$$= \mathrm{Tr}\,\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}$$

$$= \mathrm{Tr}\,(\sqrt{A}\sqrt{B})^*(\sqrt{A}\sqrt{B})$$

$$= \langle\langle \sqrt{A}\sqrt{B}, \sqrt{A}\sqrt{B} \rangle\rangle \geq 0 \quad \text{—— } (*)$$

$\mathrm{Tr}\,AB = 0$ のとき, $(*)$ の等号条件より,

$$\sqrt{A}\sqrt{B} = 0$$

左から $\sqrt{A}$, 右から $\sqrt{B}$ をかける

$$AB = 0$$

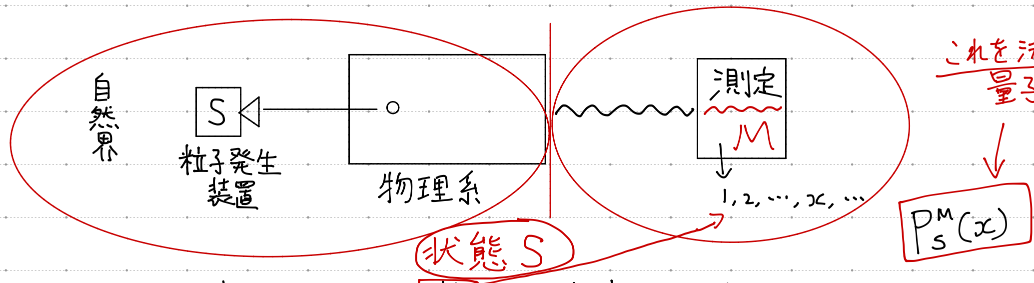
$AB = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}\,AB = 0$ は明らか □

レポート

トレースの性質 (2) を示せ　　締め切り 5/29

3、量子系の状態と測定

3−1 イントロ



1回の測定について $\boxed{値}$ を確実に予言できない。
何回も実験をすると、値の「頻度」は予言できる。