3-4 純粋状態と混合状態

復習

Def. 混合状態

$\exists \sigma_1, \sigma_2 \in S(\mathcal{H})$, $0 < \exists a < 1$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$

$\rho = a\sigma_1 + (1-a)\sigma_2$

Def. 純粋状態

Lem

(1) ρ は pure state

(2) $\exists |\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\boxed{\rho = |\psi\rangle\langle\psi|}$　　$|\psi\rangle$ を状態ベクトルという

(3) ρ の固有値は唯一1で他はゼロ

(4) $\mathrm{rank}\,\rho =$

証明

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)

$\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (3) を示す。

対偶 $\neg(3) \Rightarrow \neg(1)$

$\neg(3)$, 固有値

$$\underbrace{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r}_{r \geq 2 \text{ ゼロでない}} > \lambda_{r+1} = \cdots = 0$$

固有値分解

$$\rho = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

$$= \underbrace{\lambda_1}_{a} \underbrace{|e_1\rangle\langle e_1|}_{\sigma_1} + \underbrace{(1-\lambda_1)}_{1-a} \underbrace{\sum_{i=2}^{r} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} |e_i\rangle\langle e_i|}_{\sigma_2}$$

$$\mathrm{Tr}\,\sigma_2 = \sum_{i=2}^{r} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} \underbrace{\mathrm{Tr}\,|e_i\rangle\langle e_i|}_{\langle e_i|e_i\rangle = 1}$$

$$= \frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1} = 1$$

$\sigma_2 \geq 0$, $\therefore \sigma_2 \in S(\mathcal{H})$

よって, $\neg(1)$ が示せた。

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す。

(背理法) (2) を仮定する

(1) が成立しないと仮定して矛盾を導く

$$\underset{|\psi\rangle\langle\psi|}{\overset{(2)}{\rho}} \overset{\neg(1)}{=} a\sigma_1 + (1-a)\sigma_2 \quad — ※ \quad , \sigma_1 \neq \sigma_2, \quad 0 < a < 1$$

ONS $\underset{}{\overset{|\psi\rangle}{|e_1\rangle}}, |e_2\rangle, \cdots, |e_n\rangle$ をとる。

この基底についての成分を考える

$\langle e_i | \sigma | e_j \rangle$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

㊍より、

$$\underbrace{\langle e_k|\rho|e_k\rangle}_{=\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & k\neq 1\end{cases}} = \underbrace{a}_{\geq 0}\underbrace{\langle e_k|\sigma_1|e_k\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{(1-a)}_{\geq 0}\underbrace{\langle e_k|\sigma_2|e_k\rangle}_{\geq 0}$$

よって、$\langle e_k|\sigma_1|e_k\rangle = 0$, $\langle e_k|\sigma_2|e_k\rangle = 0$

$k = 2, 3, \cdots, n$ のとき

$$\begin{aligned}\langle e_k|\sigma_1|e_k\rangle &= 0\\ \langle e_k|\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1}|e_k\rangle &\\ \langle \sqrt{\sigma_1}e_k|\sqrt{\sigma_1}e_k\rangle &\end{aligned}$$

よって、$\sqrt{\sigma_1}|e_k\rangle = 0$

よって、$(k, l) \neq (1, 1)$

$$\langle e_k|\sigma_1|e_l\rangle = \langle\sqrt{\sigma_1}e_k|\sqrt{\sigma_1}e_k\rangle = 0$$

$\mathrm{Tr}\,\sigma_1 = 1$ より、$\langle e_1|\sigma_1|e_1\rangle = 1$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & O & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

同様に

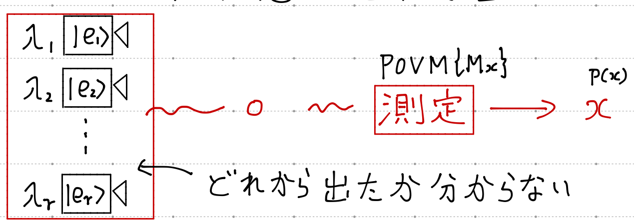
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & O & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

これは $\sigma_1 \neq \sigma_2$ に矛盾 □

3-5 混合状態について

$$\rho = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\lambda_i}_{\neq 0} |e_i\rangle\langle e_i| \quad (r \geq 2)$$

これは純粋状態の確率的重ね合わせ(混合)



$|e_i\rangle$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ のときの測定値 x

確率

$$\begin{aligned}P(x|i) &= \mathrm{Tr}\Big(\underset{\in S(\mathcal{H})}{|e_i\rangle\langle e_i|}\Big) M_x\\ &= \langle e_i|M_x|e_i\rangle\end{aligned}$$

同時確率

$$\begin{aligned}P(i, x) &= P(i)\,P(x|i)\\ &= \lambda_i \mathrm{Tr}\,|e_i\rangle\langle e_i|\,M_x\end{aligned}$$

どの状態かを知らない観測者にとって、x を得る確率

$$\begin{aligned}P(x) &= \sum_{i=1}^{r} P(i, x)\\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{Tr}\,|e_i\rangle\langle e_i|\,M_x\\ &= \mathrm{Tr}\Big(\sum_{i=1}^{r} |e_i\rangle\langle e_i|\Big) M_x\\ &= \mathrm{Tr}\,\rho\, M_x\end{aligned}$$

$\boxed{P(x)\text{をこの形で一意に記述する} \equiv \text{密度行列 } \rho}$

remark

$$\rho = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| = \sum_{j=1}^{s} \mu_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

例

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{|e_1\rangle\langle e_1|} + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{|e_2\rangle\langle e_2|}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{|f_1\rangle\langle f_1|} + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{|f_2\rangle\langle f_2|}$$

3-6 2準位系

$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

$S(\mathcal{H}) \ni \rho = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$\rho \geq 0 \Rightarrow \rho^* = \rho$ (エルミート)

より,

$$\rho^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \rho$$

これより,

$$a, d \in \mathbb{R}, \quad c = \bar{b}$$

$\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ より, $a + d = 1$

パラメータを導入

$$a = \frac{1+z}{2}, \quad d = \frac{1-z}{2}, \quad b = \frac{x-iy}{2}, \quad c = \frac{x+iy}{2}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

よって,

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \qquad \text{Stokes パラメータ}$$

$\rho \geq 0 \Leftrightarrow$ エルミート かつ 固有値 $\boxed{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0}$

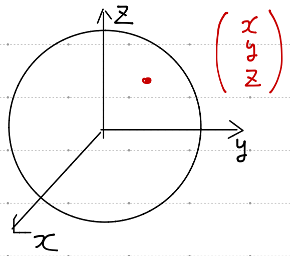
レポート

(1) $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2$

$[\mathrm{Tr}\,\rho = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ はOK}]$

(2) $\rho \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1$ を確認せよ

$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \right\}$ 球の表面+内部. この球を Bloch 球という



$$\longrightarrow \rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 \supset S \longrightarrow S(\mathcal{H})$

1対1 (bijection) 全単射

線形 (affine) (凸結合を保存)

ρが純粋状態 $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2+y^2+z^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$が球の表面

3-7 射影子 (projection)

$\mathcal{H}$: Hilbert Space

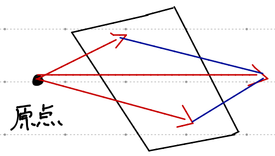
$K \subset \mathcal{H}$: subspace 部分ベクトル空間 … 部分集合自体でベクトル空間
(+, ·, $\mathcal{H}$のものを使う)
$a, b \in K \Rightarrow a+b \in K$
$c \in \mathbb{C}$, $a \in K \Rightarrow ca \in K$

レポート

(1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$, は $\mathbb{R}^2$ の部分空間か?

(2) $\mathbb{R}^3$において 平面 $x+y+z=0$ は?
平面 $x+y+z=1$ は?

違う時は反例を示せ。



6/19まで