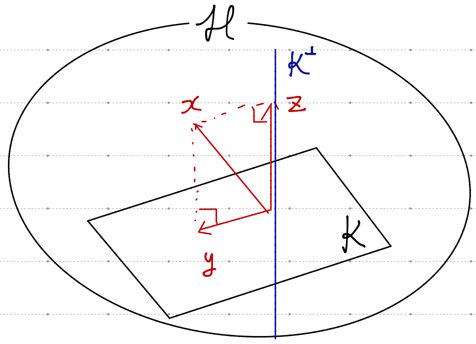
3-7 射影子 (projection)

$\mathcal{H}$, Hilbert space

$K \subset \mathcal{H}$ 部分空間 (K 自身でベクトル空間)



Def 直交補空間

$K \subset \mathcal{H}$ subspace

$K^\perp := \{ z \in \mathcal{H} \mid \langle y | x \rangle = 0, \text{ for } y \in K \}$

(ケーパープ) perp (perpendicular, 直交した)

Lem

$\forall |x\rangle \in \mathcal{H}$ に対して

$|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle$

となる $|y\rangle \in K$, $|z\rangle \in K^\perp$ が一通りに存在する。

証明

K の ONS を

$|e_1\rangle\, |e_2\rangle \cdots |e_k\rangle \quad (k = \dim K)$

とすると、$\mathcal{H}$ の ONS は

$\underbrace{|e_1\rangle|e_2\rangle \cdots |e_k\rangle}_{K\text{の ONS}}, \underbrace{|e_{k+1}\rangle \cdots |e_n\rangle}_{K^\perp\text{の ONS}} \quad (n = \dim \mathcal{H})$ (基底の延長定理)

となる。よって $|x\rangle$ は以下のように書ける。

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i |e_i\rangle$$
$$= \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{k} x_i |e_i\rangle}}_{|y\rangle} + \underbrace{\boxed{\sum_{i=k+1}^{n} x_i |e_i\rangle}}_{|z\rangle}$$

一意性を示す。

$K \cap K^\perp = \{\vec{0}\}$

$\because$ $y \in K \cap K^\perp$

$\|y\|^2 = \langle \underset{K}{y}, \underset{K^\perp}{y} \rangle = 0 \quad \therefore y = 0$ (i.e. この分解は直和分解)

$$|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle$$
$$= |y'\rangle + |z'\rangle$$

$(\underset{K}{|y\rangle - |y'\rangle} = \underset{K^\perp}{|z'\rangle - |z\rangle}) \in K \cap K^\perp \rightarrow$ よって $|y\rangle - |y'\rangle = |z'\rangle - |z\rangle$
$= 0$

$\therefore |y\rangle = |y'\rangle, \quad |z\rangle = |z'\rangle \quad \square$

Def 射影子

任意に $|x\rangle$ が与えられたとき,

$$|x\rangle = \underset{K}{\underset{\cap}{|y\rangle}} + \underset{K^\perp}{\underset{\cap}{|z\rangle}}$$

の分解に対して,

$$P: |x\rangle = |y\rangle + |z\rangle \xmapsto[\text{linear}]{} |y\rangle$$

の map は linear。 $\boxed{\text{この}P\text{を部分空間}K\text{への射影子という。}}$ $\boxed{P_K\text{ともかく。}}$

Lem $K \subset \mathcal{H}$

(1) $|y\rangle \in K$ のとき

$$P_K|y\rangle = |y\rangle$$

∵ $|y\rangle = \underset{K}{\underset{\cap}{|y\rangle}} + \underset{K^\perp}{\underset{\cap}{|0\rangle}}$

(2) $|z\rangle \in K^\perp$

$$P_K|z\rangle = |0\rangle$$

∵ $|z\rangle = \underset{K}{\underset{\cap}{|0\rangle}} + \underset{K^\perp}{\underset{\cap}{|z\rangle}}$

(3) $P_K + P_{K^\perp} = I$

∵ $|x\rangle = \underset{K}{\underset{\cap}{|y\rangle}} + \underset{K^\perp}{\underset{\cap}{|z\rangle}}$

$$P_K|x\rangle = |y\rangle$$

$$P_{K^\perp}|x\rangle = |z\rangle$$

よって $\underbrace{(P_K+P_{K^\perp})}_{I}|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle = |x\rangle$ for $\forall|x\rangle$

Lem $P = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ について以下は同値

(1) Pはある部分空間Kへの射影子

(2) $P \geq 0$, $P^2 = P$

◎ (3) $P^* = P$, $P^2 = P$

証明 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1) の順

(1) ⇒ (2)

$\forall|x\rangle \in \mathcal{H}$, $|x\rangle = |y\rangle + |z\rangle$

$$\begin{aligned}\langle x|P|x\rangle &= \langle y+z|\underbrace{P|y+z\rangle}_{=|y\rangle} \\ &= \langle y+z|y\rangle \\ &= \langle y|y\rangle + \underbrace{\langle z|y\rangle}_{=0} \\ &= \|y\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

よって $P \geq 0$

$$\begin{aligned}P^2|x\rangle &= P\cdot \underbrace{P(|y\rangle + |z\rangle)}_{=|y\rangle} \\ &= P|y\rangle \\ &= |y\rangle\end{aligned}$$

一方, $P|x\rangle = |y\rangle$ $(\forall|x\rangle)$

∴ $P^2 = P$

(2) ⇒ (3) は $A \geq 0 \Rightarrow A^* = A$ より明らか。

(3) ⇒ (1) を示す。

$K := \mathrm{Im}\, P$

$= \{ P|x\rangle \mid |x\rangle \in \mathcal{H} \}$

とおく　　　　　$I = P + (I-P)$

$|x\rangle = \underset{\in K}{P|x\rangle} + (I-P)|x\rangle$

$(I-P)|x\rangle \in K^\perp$ を示せばよい

$\forall |y\rangle \in K$ に対して

$\exists |x'\rangle \in \mathcal{H},\quad |y\rangle = P|x'\rangle$

$\langle y | z \rangle = \langle Px' | (I-P)x \rangle$

$= \langle x' | P^*(I-P) | x \rangle \qquad P^* \overset{(3)}{=} P$

$= \langle x' | P - P^2 | x \rangle \qquad P^2 \overset{(3)}{=} P$

$= 0$

よって $|z\rangle \in K^\perp$ □

Remark

$P^* = P,\ P^2 = P$ は射影子

$\mathrm{Im}\, P$ への射影子

$\{ K \subset \mathcal{H} \mid K$ 部分空間 $\}$

$\uparrow \mathrm{Im}\, P \qquad \updownarrow \qquad$ 1 to 1

$\{ P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid P = P^*,\ P = P^2 \}$

射影子全体

$I - P$ は $K^\perp$ への射影子

射影子の具体形

$K \subset \mathcal{H}$

$\underbrace{\underbrace{|e_1\rangle \cdots |e_k\rangle}_{K\text{の ONS}},\ \underbrace{|e_{k+1}\rangle \cdots |e_n\rangle}_{K^\perp\text{の ONS}}}_{\mathcal{H}\text{の ONS}}$

$P_K = \sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i|$

$\approx \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{k} & O \\ O & \underbrace{0 \ \ddots \ 0}_{n-k} \end{pmatrix}$

これを確認 (レポート)

$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i |e_i\rangle$ を任意のベクトルとして,

(1) $\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i| \right)}_{=\, Q} |x\rangle$ を計算して $Q|x\rangle \in K$

(2) $(I-Q)|x\rangle$ を計算して $(I-Q)|x\rangle \in K^\perp$

を示せ。

レポートの計算より,

$$|x\rangle = Q|x\rangle + (I-Q)|x\rangle$$

よって $Q = P_K$ が示せる。

3-8 スペクトル分解

A: エルミート

$$A = \sum_{i=1}^{n} \underset{\text{Aの固有値}}{\lambda_i} \underset{\substack{\text{固有ベクトル} \\ \text{ONS}}}{|e_i\rangle}\langle e_i|$$

固有値の重複を考えてインデックスを付け直す。

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \cdots = \lambda_{1j_1} \equiv a_1$$
$$\neq$$
$$\lambda_{21} = \lambda_{22} = \cdots = \lambda_{2j_2} \equiv a_2$$
$$\neq \ \vdots \ \neq$$
$$\lambda_{m1} = \lambda_{m2} = \cdots = \lambda_{mj_m} \equiv a_m$$

合計 n 個

$j_1, j_2, \cdots, j_m$ は, $a_1, a_2, \cdots, a_m$ の重複度

m は異なる固有値の数。このインデックスで書き直す

$$A = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{j_k} \underset{\substack{\| \\ a_k}}{\lambda_{k,j}} |e_{k,j}\rangle\langle e_{k,j}|$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k \boxed{\left(\sum_{j=1}^{j_k} |e_{k,j}\rangle\langle e_{k,j}|\right)} \equiv: E_k$$

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_k \quad \longleftarrow \text{スペクトル分解}$$

E_k は固有値 a_k の $\boxed{\text{固有部分空間}}$ への射影子

$$\| $$
$$\{|\psi\rangle \in \mathcal{H} \mid A|\psi\rangle = a_k|\psi\rangle\}$$
$$\| \ a_k \text{の固有ベクトル全体}$$

$$\mathrm{Im}\, E_k = \mathrm{span}\{|e_{k,j}\rangle \mid j = (1 \cdots j_k)\}$$