# 3-8 スペクトル分解

(復習)

A: エルミート

$A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_k$　　$j_k$: 重複度　$|e_{k,j}\rangle$: ONS

固有値　　$\boxed{\sum_{j=1}^{j_k} |e_{k,j}\rangle\langle e_{k,j}|}$ = 射影

$$\underbrace{\mathrm{span}\{|e_{k,j}\rangle\}_{j=1}^{j_k} \equiv K_k}_{a_k\text{の固有空間}}$$

ベクトルの組

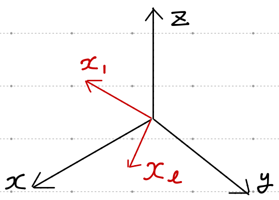
$x_1, x_2, \cdots, x_\ell \in \mathcal{H}$

に対して　　　　$x_1 \cdots x_\ell$ を含む超平面

$$\mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_\ell\} := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} c_i x_i \;\middle|\; c_1, \cdots, c_\ell \in \mathbb{C} \right\}$$

これは $\mathcal{H}$ の部分空間

例




$\boxed{a_k \text{の固有空間} K_k \text{のベクトルは、すべて} a_k \text{の固有ベクトル}}$

∵　$x \in K_k = \mathrm{span}\{|e_{k,j}\rangle\}_{j=1}^{j_k}$

$$x = \sum_{j=1}^{j_k} c_j |e_{k,j}\rangle$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{j_k} c_j \underbrace{A|e_{k,j}\rangle}_{=\, a_k|e_{k,j}\rangle}$$

$$= a_k \underbrace{\sum_{j=1}^{j_k} c_j |e_{k,j}\rangle}_{x}$$

$$= a_k x$$

固有空間 = {固有ベクトル}

$\mathcal{H} = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_m$　　$\oplus$: 直交直和

$A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_k$　$E_k$ = 固有空間 $K_k$ への射影子

異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交

⇓

異なる固有値に対応する固有空間は直交

よって

$$E_k E_\ell = \begin{cases} E_k^2 = E_k & (k = \ell) \\ 0 & (k \neq \ell) \end{cases}$$

## Fact

スペクトル分解は一意（固有値分解は一意でない）

## 例

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

スペクトル分解

$$A=\underset{\text{固有値}}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{射影子}}+3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

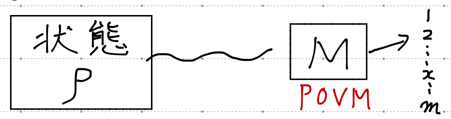
$$A=2\underset{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0)}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}}+2\underset{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0)}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}}+3\underset{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 1)}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}}$$

$$A=2\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1\ 0)}+2\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ -1\ 0)}+3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

固有値2に対応する固有ベクトル

## 3-9 PVM (projection valued measurement)（射影測定）

量子力学の測定




$M=\{M_x\}_{x\in\mathcal{X}}$　　$\mathcal{X}=\{1,2,\cdots,m\}$

$M_x\geq 0,\ \sum_{x\in\mathcal{X}}M_x=I$

POVMの特別な場合としてすべての$M_x$が射影子のとき，PVMという。

## Lem

$M=\{M_x\}$がPVMのとき

$$M_xM_y=\delta_{x,y}M_x\quad(\underset{\text{自明}}{M_x^2=M_x},\ \underset{\text{非自明}}{M_xM_y=0\ (x\neq y)})$$

## proof

$M_xM_y=0\ (x\neq y)$を示す。

$$\sum_{x'}M_{x'}=I$$

$$I-M_x=\sum_{x'\neq x}M_{x'}\geq M_y\geq 0$$

$M_y$ 入ってる

$M_x\geq 0$ より，

$$\underbrace{\mathrm{Tr}\,M_x(I-M_x)}_{\substack{\mathrm{Tr}(M_x-M_x^2)\\ \parallel\\ M_x}=0}\ \underset{(2)}{\geq}\ \underset{0}{\boxed{\mathrm{Tr}\,M_xM_y}}\ \underset{(1)}{\geq}\ 0$$

等号成立 $M_xM_y=0$

(1) $A\geq 0,\ B\geq 0$ のとき
$\mathrm{Tr}\,AB\geq 0$
（等号成立 $\Leftrightarrow AB=0$）（既出）

(2) $A\geq 0$, $B\geq C$ のとき
$\mathrm{Tr}\,AB\geq \mathrm{Tr}\,AC$

$\because\ \mathrm{Tr}\,AB-\mathrm{Tr}\,AC$
$=\mathrm{Tr}\,\underset{\overset{\vee}{0}}{A}\underset{\overset{\vee}{0}}{(B-C)}\geq 0$

## 3-10 オブザーバブル（observable）

エルミート作用素Aをオブザーバブル（観測可能量）という。
（自己共役）

理由

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_k \xleftrightarrow[\text{(1対1対応)}]{\text{全単射}} \boxed{\begin{matrix}\text{PVM} \\ E = \{E_k\}_{k=1}^{m}\end{matrix}} \rightarrow \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix}$$

スペクトル分解

$$\sum_{k=1}^{m} E_k = I$$

状態 $\rho$ （$\rho \geq 0$, $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$）のとき，observable A により，測定結果 $a_k$ $(k = 1 \cdots m)$ が，確率 $P(a_k) = \mathrm{Tr}\,\rho E_k$ で得られる。

期待値

$$\mathbb{E}_\rho[A] = \sum_{k=1}^{m} a_k P(a_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathrm{Tr}\rho E_k = \mathrm{Tr}\rho\left(\sum_k a_k E_k\right) = \boxed{\mathrm{Tr}\,\rho A}$$

## 3-11 エルミート行列の関数

Def

A：エルミート

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 実数値関数

$A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_k$ スペクトル分解

$$f(A) := \sum_{k=1}^{m} f(a_k) E_k$$

$f(x) = x^2$ のとき，

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} a_k E_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell E_\ell\right) \\ &= \sum_k \sum_\ell a_k a_\ell \boxed{E_k E_\ell} = \delta_{k,\ell} E_k \\ &= \sum_k a_k^2 E_k = f(A) \end{aligned}$$

これより，well-defined

同様に $f(x) = x^n$ のとき

$$f(A) = A^n$$

$f(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n}$ とテーラー展開されるとき，

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=1}^{m} f(a_k) E_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} C_n a_k^n E_k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{m} a_k^n E_k}}_{A^n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n A^n \end{aligned}$$

3-12 同時測定可能性

$A$ : エルミート (observable)

Lem

$A = \sum_{k=1}^{m} a_k E_k$ (スペクトル分解)

このとき $k = 1, 2, \cdots, m$ について $f_k(x)$ が存在して

$$f_k(A) = E_k$$

proof

$$f_k(A) = \sum_{l=1}^{m} \underbrace{f_k(a_l)}_{= \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}} E_l = E_k$$

となる関数 $f_k(x)$ があればよい。

$$f_k(x) = \frac{\prod_{l \neq k} (x - x_l)}{\prod_{l \neq k} (x_k - x_l)} \leftarrow m-1 \text{積}$$

で OK □