復習

A：エルミート行列

$$A = \sum_i \boxed{a_i} E_i \quad (\text{スペクトル分解})$$

固有値　射影子

E_i は A の多項式 $f_i(x)$ を用いて

$$E_i = f_i(A)$$

3-12 同時測定可能性

Thm A, B をオブザーバブル（エルミート行列）

$$A = \sum_i a_i E_i \ , \quad B = \sum_j a_j E_j$$

をスペクトル分解とする。このとき，以下は同値

(1) A と B は可換 $(AB = BA)$

(2) E_i と F_j は可換

(3) ある PVM $\{G_{ij}\}$ が存在して

$$E_i = \sum_j G_{ij} \ , \quad F_j = \sum_i G_{ij}$$

remark　$\rho \in S(\mathcal{H})$（密度行列）

$$P_\rho^E(i) = \mathrm{Tr}\,\rho E_i$$

$$P_\rho^F(j) = \mathrm{Tr}\,\rho F_j$$

$$P_\rho^G(i,j) = \mathrm{Tr}\,\rho G_{ij}$$

$(3) \Leftrightarrow {}^\forall \rho \in S(\mathcal{H})$

$$P_\rho^E = \sum_j P_\rho^G(i,j)$$

$$P_\rho^F = \sum_i P_\rho^G(i,j)$$

（証明）

$(1) \Rightarrow (2)$

$$E_i = \sum_k \alpha_{i,k} A^k$$
$$F_j = \sum_\ell \beta_{j,\ell} B^\ell$$
（多項式）

より，E_i F_j は可換

$(2) \Rightarrow (3)$

$G_{ij} := E_i F_j$ とおく

これが PVM の条件を満たすか調べる

◎ $G_{i,j}$ が射影子であること

$\Leftrightarrow$ エルミート　かつ　$G_{ij}^2 = G_{i,j}$

エルミート

$$G_{ij}^* = (E_i F_j)^* = F_j^* E_i^* \underset{\text{エルミート}}{=} F_j E_i \underset{(2)}{=} E_i F_j$$

$G_{i,j}^2 = G_{i,j}$

$$G_{i,j}^2 = (E_i F_j)^2 = E_i F_j E_i F_j \underset{(2)}{=} E_i^2 F_j^2 \underset{E_i, F_j \text{射影}}{=} E_i F_j = G_{i,j}$$

◎ $\sum_i \sum_j G_{ij} = I$

$$\sum_i \sum_j \underbrace{\boxed{G_{ij}}}_{E_i F_j} = \underbrace{\left(\sum_i E_i\right)}_{= I}\underbrace{\left(\sum_j F_j\right)}_{= I} = I$$

$$\begin{cases} \sum_j G_{ij} = E_i \underbrace{\sum_j F_j}_{I} = E_i \\ \sum_i G_{ij} = F_j \sum_i E_i = F_j \end{cases}$$

(3) ⇒ (1)

$$G_{ij} G_{kl} = \begin{cases} G_{ij} & (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

より 特に $\{G_{ij}\}$ は互いに可換。このとき，

$$\left.\begin{aligned} E_i &= \sum_j G_{ij} \\ F_j &= \sum_i G_{ij} \end{aligned}\right\} \text{可換}$$

□

remark

A, B が可換でなければ，測定 i, j の (3) の意味での同時分布はない。

4 合成系 (composite system)

4-1 テンソル積空間

例 $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$

基底 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

クロネッカー積

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \\ a_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 b_1\\a_1 b_2\\a_1 b_3\\a_2 b_1\\a_2 b_2\\a_2 b_3\end{pmatrix}$$

基底のクロネッカー積

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

これは $\mathbb{C}^6$ の基底

$$\mathbb{C}^6 = \mathrm{span}\left\{ e_i \otimes f_j \;\middle|\; e_i\ (i=1,2) : \text{基底},\ f_j\ (j=1,2,3) : \text{基底} \right\}$$

このことを

$$\mathbb{C}^6 = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3}_{\text{テンソル積空間}}$$

とかく。

V_1, V_2 : ベクトル空間

⑥ 次の性質を満たす写像

$$\begin{array}{ccc} \otimes : (\varphi, \psi) & \longmapsto & \varphi\otimes\psi \\ \cap & & \cap \\ V_1 , V_2 & \longrightarrow & W \\ \mathbb{C}^2 \quad \mathbb{C}^3 & & \mathbb{C}^6 \end{array}$$

を考える。

(1) $\otimes$ は (φ について線形, ψ について線形) 双線形

(2) $\{e_i\}$ V_1 の基底, $\{f_j\}$ V_2 の基底

とすると, $\{e_i \otimes f_j\}$ は W の基底

(1),(2) が満たされるとき, $(\otimes, W)$ をテンソル積空間という。

$W = V_1 \otimes V_2$ と書く

Fact

テンソル積空間は同形(線形同形)を除いて一意

テンソル積空間は必ず作れる

例 (同形を除いて一意)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_2 \\ a_1 b_3 \\ a_2 b_3 \end{pmatrix}$$

レポート

基底の行先

(1) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_i \otimes' f_j$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3)$

を求めよ。

(2) $e_i \otimes f_j = P\, e_i \otimes' f_j$

となる行列 P を求めよ
(6×6)

Def

$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$: Hilbert space

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ (ベクトル空間のテンソル積)

に次の内積を与えたものをヒルベルト空間のテンソル積という。

$$\underbrace{\langle u\otimes v \mid \phi\otimes\psi \rangle}_{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\text{の内積}} := \underbrace{\langle u \mid \phi \rangle}_{\mathcal{H}_1\text{の内積}} \cdot \underbrace{\langle v \mid \psi \rangle}_{\mathcal{H}_2\text{の内積}}$$

これを線形に拡大

4-2 作用素(行列)のテンソル積

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & a_{ij} \\ & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & b_{ij} \\ & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

クロネッカー積

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots \\ a_{21}B & \ddots & \vdots \\ \vdots & & a_{ij}B \\ & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$(A \otimes B)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) = (A|\varphi\rangle) \otimes (B|\psi\rangle)$$

一般的に

$A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{K}_1$

$B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{K}_2$

上式のルールを線形に拡大して

$$A \otimes B : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$$

を定義する。

[∵ $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の基底の行先

$(A \otimes B)(|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle) = (A|e_i\rangle) \otimes (B|f_j\rangle)$

$L_A : X \mapsto AX$ $\qquad L_A R_B \approx A \otimes B$

$R_B : X \mapsto XB$

$(L_A + R_A)(X) = AX + XA = Y \geq 0$ $\quad$ Yを決めるとXが一意に定まる。

リアプノフ方程式