復習

$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$: Hilbert space

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \left\{ \sum_{ij} c_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \;\middle|\; c_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

$\{|e_i\rangle\}$: $\mathcal{H}_1$ の基底

$\{|f_j\rangle\}$: $\mathcal{H}_2$ の基底

4-2 作用素(行列)のテンソル積

$A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{K}_1$

$B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{K}_2$

に対して

$$(A \otimes B)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) = (A|\varphi\rangle) \otimes (B|\psi\rangle) \quad — (*)$$

を線形拡大して

$$A \otimes B : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \xrightarrow[\text{linear}]{} \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$$

で定める。

$\because$ 基底 $|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$ の行先が定まる。

レポート

$\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^3$

クロネッカー積を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_1 b_3 \\ a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_1 b_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} B & a_{12} B \\ a_{21} B & a_{22} B \end{pmatrix}$$

とおくとき, $(*)$ を示せ

テンソル積の性質

(1) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

(2) $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$

(3) $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = (\mathrm{Tr} A)(\mathrm{Tr} B)$

(4) $A|\varphi\rangle = a|\varphi\rangle$, $B|\psi\rangle = b|\psi\rangle$ $\quad a, b$: 固有値, $|\varphi\rangle, |\psi\rangle$: 固有ベクトル

$$(A \otimes B)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) = \underset{\text{固有値}}{ab}\; \underbrace{|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle}_{\text{固有ベクトル}}$$

(5) $A \geq 0$, $B \geq 0$

$\Rightarrow A \otimes B \geq 0$

$\because$ $A = C^* C$, $B = D^* D$

$A \otimes B = (C \otimes D)^* (C \otimes D) \geq 0$ //

固有値を考えても示せる

$|\varphi\rangle\langle\psi|$ operator, rank $=1$

$$(|\varphi\rangle\langle\psi|)|x\rangle = \langle\psi|x\rangle|\varphi\rangle \in \mathrm{span}\{|\varphi\rangle\},\ \dim = 1$$

$$(|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle)(\langle u|\otimes\langle v|)$$ rank 1 の行列

$$= (|\varphi\rangle\langle u|)\otimes(|\psi\rangle\langle v|)$$

$\{|e_i\rangle\}$: $\mathcal{H}_1$ の ONS

$$|e_i\rangle\langle e_j| = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (0 \cdots 1 \cdots 0) \\ j \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} i\text{th} \end{array}\begin{pmatrix} & 1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & & \end{pmatrix}_{j\text{th}} \quad \boxed{n\times n}$$

※ $X = (x_{ij})$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}|e_i\rangle\langle e_j|$$

表現行列

これは $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ の基底
(正方全体)

$\mathcal{H}_1$ の ONS $\{|e_i\rangle\}$

$\mathcal{H}_2$ の ONS $\{|f_j\rangle\}$

$\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ 上の operator $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)$

は以下の基底(行列の基底)で書ける。

$$(|e_i\rangle\otimes|f_k\rangle)(\langle e_j|\otimes\langle f_l|) = |e_i\rangle\langle e_j|\otimes|f_k\rangle\langle f_l|$$

$$X = \sum_{ij}\sum_{kl} x_{ijkl}|e_i\rangle\langle e_j|\otimes|f_k\rangle\langle f_l|$$

4-3 合成系 (composite system)

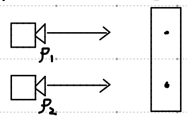
(1) $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ で表される系の合成系は $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ で表される。

すなわち、状態 $\rho_{AB} \in S(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)$

測定 $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ 上の POVM

(2) 系1の状態 $\overset{2\times 2}{\rho_1} \in S(\mathcal{H}_1)$

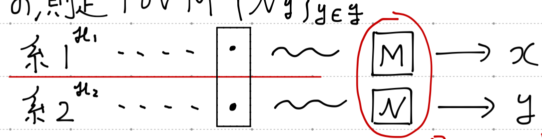
系2の状態 $\overset{3\times 3}{\rho_2} \in S(\mathcal{H}_2)$



状態 $\rho_1\otimes\overset{6\times 6}{\rho_2} \in S(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)$

(3) 系1の測定 POVM $\{M_x\}_{x\in\mathcal{X}}$

系2の測定 POVM $\{N_y\}_{y\in\mathcal{Y}}$



POVM $\{M_x\otimes N_y\}_{x,y}$

合成系のPOVMとして $\{M_x\otimes N_y\}$ と書ける。

例

独立な状態準備 と 独立な測定

$\Downarrow$

測定結果の分布は独立

$$P(x,y) = \mathrm{Tr}(\rho_1 \otimes \rho_2)(M_x \otimes N_y)$$
$$= (\mathrm{Tr}\,\rho_1 M_x)(\mathrm{Tr}\,\rho_2 N_y)$$
$$= p(x)\,p(y)$$

(3)において, 系2を測定しない場合, 合成系のPOVM $\{M_x \otimes I\}_x$

測定しない = 常に同じ目盛りを示す測定

POVMは I の分解 $N_0 = I$, $N = \{N_0\}$: POVM

4-4 部分トレース (partial trace)

確率 $\underset{\text{同時分布}}{P(x,y)} \longrightarrow \underset{\text{周辺分布}}{P(x) = \sum_y P(x,y)}$

Def

$X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ に対して, 部分トレースを以下で定義

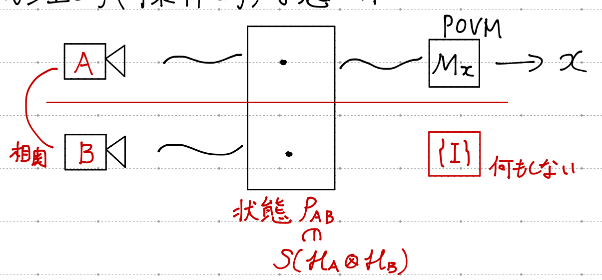
(1) $X = X_A \otimes X_B$ のとき

$$\underbrace{\mathrm{Tr}_B}_{\text{Bをトレースアウト}} X = (\mathrm{Tr}\,X_B)\,X_A$$

(2) 一般のとき,

$$X = \sum_{ij}\sum_{kl} x_{ijkl} |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_k\rangle\langle f_l|$$
$$\mathrm{Tr}_B X = \sum_{ij}\sum_{kl} x_{ijkl} |e_i\rangle\langle e_j| \cdot \underbrace{\mathrm{Tr}|f_k\rangle\langle f_l|}_{= \langle f_l|f_k\rangle = \delta_{lk}}$$
$$= \sum_{ij} \underbrace{\Big(\sum_k x_{ijkk}\Big)}_{\text{テンソルの縮約}} |e_i\rangle\langle e_j|$$

物理的(操作的)な意味



測定結果の分布は
系Aだけで書けるはず

答え $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\,\rho_{AB}$

$\because$ $\mathrm{Tr}\,\rho_{AB}(M_x \otimes I) = \mathrm{Tr}\,\rho_A M_x$ for $\forall$POVM $\{M_x\}$

が成立していればよい。

Lemma

$X_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$

$Y_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$

に対して，

$$\mathrm{Tr}\, X_{AB}(Y_A \otimes I_B) = \mathrm{Tr}\, \underbrace{X_A}_{= \mathrm{Tr}_B X_{AB}} Y_A$$

X_{AB}について線形 — ①

証明

① より $X_{AB} = \tilde{X}_A \otimes \tilde{X}_B$ のとき確かめればよい。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \mathrm{Tr}(\tilde{X}_A \otimes \tilde{X}_B)(Y_A \otimes I) \\ &= (\mathrm{Tr}\, \tilde{X}_A Y_A)(\mathrm{Tr}\, \tilde{X}_B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \mathrm{Tr}\, \underbrace{X_A}_{= (\mathrm{Tr}\tilde{X}_B)\tilde{X}_A} Y_A \\ &= (\mathrm{Tr}\, \tilde{X}_A Y_A)(\mathrm{Tr}\, \tilde{X}_B) \quad \square\end{aligned}$$