4-9 maximally entangled state

復習

$$|\Phi\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} |e_k\rangle \otimes |f_k\rangle$$

$\{|e_k\rangle\}, \{|f_k\rangle\}$: ONS $\in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ベクトル状態

Lem

任意の ONS on $\mathcal{H}_A$ $|e_k'\rangle$ に対して, ONS on $\mathcal{H}_B$ $|f_k'\rangle$ が存在して

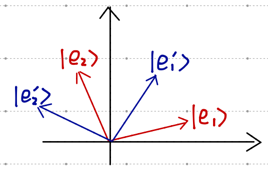
$$|\Phi_{AB}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} |e_k'\rangle \otimes |f_k'\rangle$$

例

$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$

$|e_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$|f_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad |f_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



$|e_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle$

$|e_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle$ $\qquad \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \quad \theta = 45°$

このとき、

$$|e_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad |e_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$|f_1'\rangle$ と $|f_2'\rangle$ を

$$|f_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f_1\rangle + |f_2\rangle), \quad |f_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f_1\rangle - |f_2\rangle)$$

とおくと、

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\rangle \otimes |f_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |f_2\rangle\right)$$
$$\overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1'\rangle \otimes |f_1'\rangle + |e_2'\rangle \otimes |f_2'\rangle\right)$$

:)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1'\rangle \otimes |f_1'\rangle + |e_2'\rangle \otimes |f_2'\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}(|e_1\rangle + |e_2\rangle) \otimes (|f_1\rangle + |f_2\rangle) + \frac{1}{2}(|e_1\rangle - |e_2\rangle) \otimes (|f_1\rangle - |f_2\rangle)\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|e_1\rangle \otimes |f_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |f_2\rangle\right\}$$

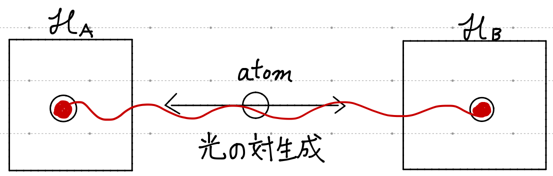
測定結果の相関

PVM

$$\left\{ |f_1\rangle\langle f_1| = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \ |f_2\rangle\langle f_2| = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\} \rightarrow \ell = 1,2$$

PVM

$$\left\{ |e_1\rangle\langle e_1| = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \ |e_2\rangle\langle e_2| = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\} \rightarrow k = 1,2$$



量子相関
(エンタングルメント)

例えば、 $|\Phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\rangle \otimes |f_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |f_2\rangle\right)$

測定結果の確率

$k \backslash \ell$	1	2
1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{2}$

$$P(k,\ell) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = \ell) \\ 0 & (k \neq \ell) \end{cases}$$

別のPVM

$$A:\begin{cases}|e_1'\rangle\langle e_1'| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\\ |e_2'\rangle\langle e_2'| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$B:\begin{cases}|f_1'\rangle\langle f_1'| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\\ |f_2'\rangle\langle f_2'| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\end{cases}$$

を用いても同じ

$k' \backslash \ell'$	1	2
1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{2}$

$$P(k',\ell') = \begin{cases}\frac{1}{2} & (k'=\ell')\\ 0 & (k'\neq\ell')\end{cases}$$

4-10 量子テレポーテーション

Bell基底　　　$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{|01\rangle}_{|0\rangle\otimes|1\rangle} + |10\rangle)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

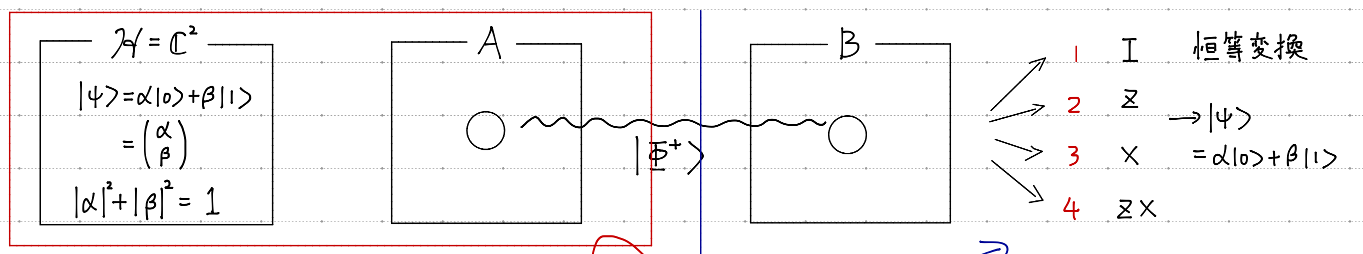
$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

45°回転

$\boxed{|01\rangle}$ $\boxed{|10\rangle}$ $\boxed{|00\rangle}$ $\boxed{|11\rangle}$ $\mathbb{C}^4$の基底

$\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$ の基底 (ONS)



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle) \longrightarrow \begin{cases}|0\rangle \xrightarrow[1/2]{\text{Prob}} |0\rangle\\ |1\rangle \xrightarrow[1/2]{} |1\rangle\end{cases}$$

PVM

Bell基底で測定

結果
1, 2, 3, 4 (2bit)

電話で伝える

Alice　Bob

Bobの操作 (ユニタリ変換)

$$Z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad X = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

bit flip

$$X|0\rangle = X\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = X\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

phase flip

$$Z|0\rangle = Z\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = Z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -|1\rangle$$

最終レポート

方程式

$$Ax = b \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ A : m \times n \text{ 行列})$$

（bが与えられて，xを求める）

(1) 解をもつ必要十分条件を示し、証明せよ。

(2) 解をもたない場合，　　　$\|y\|^2 = \sum_i y_i^2$

$$\|b - Ax\|^2$$

を最小にしたい。これを最小にする x の条件が

$$A^T A x = A^T b \quad \text{（正規方程式）}$$

で与えられることを示せ。

(3) 正規方程式を解く方法について述べよ。（研究に結びつけて）

(4) 一般化逆行列について調べて述べよ。

（特に Moor − Penrose 型について述べよ）（cf. 最小2乗型）

しめ切り　8/30（金）