2013 年度ネットワーク基礎論２ レポート解答

2013/8/27
小川朋宏

[1] 4/24 出題レポート

実数変数の二次多項式の集合 $P_2 = \{\, ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \,\}$ を考える．

(1) 一次独立（線形独立）の定義を述べよ．

(2) 基底の定義を述べよ．

(3) $1,\ x,\ x^2$ が P_2 の基底であることを示せ（1 は定数関数）．

(4) $1,\ (x+1),\ (x+1)^2$ が P_2 の基底であることを示せ．

(5) 線形写像

$$A : f(x) = ax^2 + bx + c \in P_2 \longmapsto f'(x) = 2ax + b \in P_2$$

について，基底 $1,\ x,\ x^2$ と基底 $1,\ (x+1),\ (x+1)^2$ に関する二通りの表現行列を求めよ．

解答

(1) スカラー K 上（$K = \mathbb{C}$ または $K = \mathbb{R}$）のベクトル空間 V において，ベクトルの集合 $\{\, v_1, v_2, \ldots, v_m \,\}$ が一次独立 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0$ $(c_i \in K)$ ならば $c_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

(2) スカラー K 上（$K = \mathbb{C}$ または $K = \mathbb{R}$）のベクトル空間 V において，ベクトルの集合 $\{\, e_1, e_2, \ldots, e_n \,\}$ が以下を満たすとき基底という．

(i) $\{\, e_1, e_2, \ldots, e_n \,\}$ は一次独立．

(ii) すべての $v \in V$ は，$v = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ $(c_i \in K)$ のように $\{\, e_1, e_2, \ldots, e_n \,\}$ の線形結合で表される．

(3) (i) $1,\ x,\ x^2$ が一次独立であることを示す．$ax^2 + bx + c = 0$ とする．$x = 0$ を代入すると $c = 0$ が得られる．$x = 1,\ x = -1$ を代入すると $a + b = 0,\ a - b = 0$．これより，$a = b = 0$ となる．よって，$1,\ x,\ x^2$ は一次独立である．

(ii) すべての二次多項式が $1,\ x,\ x^2$ の線形結合で書けることは P_2 の定義より明らか．

(4) (i) $1,\ (x+1),\ (x+1)^2$ が一次独立であることを示す．$a(x+1)^2 + b(x+1) + c = 0$ とする．$x = -1$ を代入すると $c = 0$ が得られる．$x = 0,\ x = -2$ を代入すると $a + b = 0$, $a - b = 0$．これより，$a = b = 0$ となる．よって，$1,\ (x+1),\ (x+1)^2$ は一次独立である．

(ii) すべての二次多項式が $1,\ (x+1),\ (x+1)^2$ の線形結合で書けることを示す．

$$a'(x+1)^2 + b'(x+1) + c' = a'x^2 + (2a' + b')x + a' + b' + c'$$

であるから，任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ について，$a = a',\ b = 2a' + b',\ c = a' + b' + c'$ となる $a', b', c' \in \mathbb{R}$ があれば良い．この連立方程式は以下の解を持つので主張が示された．

$$\begin{aligned} a' &= a \\ b' &= b - 2a' = b - 2a \\ c' &= c - a' - b' = c - a - (b - 2a) = a - b + c \end{aligned}$$

(5)

$$A\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

より，$\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}$ に関する表現行列は $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ である．同様に

$$A\begin{bmatrix}1 & (x+1) & (x+1)^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2(x+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & (x+1) & (x+1)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

より，$\begin{bmatrix}1 & (x+1) & (x+1)^2\end{bmatrix}$ に関する表現行列は $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ である．（同じ表現行列になってしまい，出題ミスでした.）

[2] 5/8 出題レポート

$A = \begin{bmatrix}3 & -1\\-1 & 3\end{bmatrix}$ を固有値分解せよ．

解答

固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix}\lambda-3 & 1\\1 & \lambda-3\end{bmatrix} = (\lambda-3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4) = 0$$

を解くことで，A の固有値は $\lambda = 2, 4$ と求まる．固有ベクトルは，それぞれ，

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0 \quad (\lambda = 2), \qquad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0 \quad (\lambda = 4)$$

を満たすベクトルである．規格化（ノルムが 1）されたものは，それぞれ，

$$|e_1\rangle = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \quad (\lambda = 2), \quad |e_2\rangle = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \quad (\lambda = 4),$$

となる．よって，固有値分解は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}A &= 2\,|e_1\rangle\langle e_1| + 4\,|e_2\rangle\langle e_2|\\&= 2\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

[3] 5/15 出題レポート

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 A について，以下は同値である．

(1) $A = 0$

(2) $\forall x, y \in \mathcal{H}\ \langle x|Ay\rangle = 0$

(3) $\forall x \in \mathcal{H}\ \langle x|Ax\rangle = 0$

上記補題において (1)⇒(3) は明らかである．(3)⇒(2) および (2)⇒(1) を示すため，次を示せ．

(i) $i = \sqrt{-1}$ とするとき，

$$\langle x|Ay\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}(-i)^k \langle x + i^k y|A|x + i^k y\rangle \qquad (\diamondsuit)$$

（板書は間違えていました．こちらが正しいです.）

(ii) (i) より (3)⇒(2) を示せ.

(iii) $\forall x \in \mathcal{H},\ \langle x|y\rangle = 0 \Rightarrow y = 0$

(iv) (2)⇒(1) を示せ.

解答

(i) 内積の歪線形性より，次式が成り立つ.

$$\langle x + y|A|x + y\rangle = \langle x|A|x\rangle + \langle y|A|y\rangle + \langle x|A|y\rangle + \langle y|A|x\rangle \qquad (1)$$

上式で y を $-y$ に置き換えると，

$$\langle x - y|A|x - y\rangle = \langle x|A|x\rangle + \langle y|A|y\rangle - \langle x|A|y\rangle - \langle y|A|x\rangle \qquad (2)$$

(1) から (2) を引くと

$$2\langle x|A|y\rangle + 2\langle y|A|x\rangle = \langle x + y|A|x + y\rangle - \langle x - y|A|x - y\rangle \qquad (3)$$

上式で y を iy に置き換えると，内積の歪線形性より，

$$2i\langle x|A|y\rangle - 2i\langle y|A|x\rangle = \langle x + iy|A|x + iy\rangle - \langle x - iy|A|x - iy\rangle \qquad (4)$$

(3)+$(-i)$×(4) より

$$4\langle x|A|y\rangle = \langle x + y|A|x + y\rangle - \langle x - y|A|x - y\rangle - i\langle x + iy|A|x + iy\rangle + i\langle x - iy|A|x - iy\rangle$$

これは $\diamondsuit$ に他ならない.

(ii) (3) を仮定すると，$\diamondsuit$ より (2) が成り立つ.

(iii) $x = y$ とすると $\langle y|y\rangle = \|y\|^2 = 0$ より $y = 0$.

(iv) (2) を仮定すると，(iii) より $\forall y \in \mathcal{H}$ について $Ay = 0$ である．よって $A = 0$.

[4] 5/22 出題レポート

トレースの性質 $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$ を示せ.

解答

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $B : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ として，$|e_1\rangle, \ldots, |e_n\rangle$ を $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底，$|f_1\rangle, \ldots, |f_m\rangle$ を $\mathbb{C}^m$ の正規直交基底とする.

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|, \quad I_m = \sum_{j=1}^{m} |f_j\rangle\langle f_j|$$

を用いると以下のように示される.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, AB &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i|AB|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle e_i|A\,|f_j\rangle\langle f_j|\,B|e_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \langle f_j|B\,|e_i\rangle\langle e_i|\,A|f_j\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle f_j|BA|f_j\rangle = \mathrm{Tr}\, BA
\end{aligned}$$

[5] 6/12 出題レポート (1)

$\rho = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ について以下を示せ.

(1) ρ の固有値は $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$

(2) $\rho \geq 0 \iff x^2+y^2+z^2 \leq 1$

解答

(1) 固有方程式は

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - \rho) &= \det\begin{bmatrix} \lambda - \frac{1+z}{2} & -\frac{x-iy}{2} \\ -\frac{x+iy}{2} & \lambda - \frac{1-z}{2} \end{bmatrix} = \left(\lambda - \frac{1+z}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1-z}{2}\right) - \frac{(x+iy)(x-iy)}{4} \\
&= \lambda^2 - \lambda + \frac{1-(x^2+y^2+z^2)}{4} = 0
\end{aligned}$$

これを解いて，$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$

(2) “$\rho \geq 0 \iff \rho$ はエルミートかつ固有値がすべて非負” に注意する．ρ は既にエルミートであるから，$\rho \geq 0$ となる必要十分条件は，$\lambda_1 \geq 0$ かつ $\lambda_2 \geq 0$ である．$\lambda_1 \geq 0$ は既に成り立っているので，

$$\rho \geq 0 \iff \lambda_2 \geq 0 \iff x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

[6] 6/12 出題レポート (2)

(1) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \,\}$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間か？

(2) $\mathbb{R}^3$ において平面 $x+y+z=0$ は部分空間か？

(3) $\mathbb{R}^3$ において平面 $x+y+z=1$ は部分空間か？

解答

部分空間である必要十分条件は和とスカラー倍について閉じていることである．

(1) 部分空間ではない．
反例：$(1,1) \in \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \,\}$ であるが，$-(1,1) \notin \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \,\}$ である．

(2) 部分空間である．
証明：$P = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \,\}$ とおく．$(x,y,z) \in P$ とすると，スカラー倍 $c(x,y,z) = (cx,cy,cz)$ $(c \in \mathbb{R})$ について，

$$cx + cy + cz = c(x+y+z) = 0$$

であるから，$c(x,y,z) \in P$ である．また，$(x,y,z), (x',y',z') \in P$ とすると，和 $(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$ について

$$(x+x') + (y+y') + (z+z') = (x+y+z) + (x'+y'+z') = 0$$

であるから，$(x,y,z) + (x',y',z') \in P$ である．

(3) 部分空間ではない．
反例:$(1,0,0) \in \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1 \,\}$であるが，$2(1,0,0) \notin \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1 \,\}$ である．

[7] 6/19 出題レポート

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ を部分空間とする ($n = \dim \mathcal{H}$, $k = \dim \mathcal{K}$)．$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^n$ を $|e_1\rangle, \dots, |e_k\rangle$ が $\mathcal{K}$ の正規直交基底，$|e_{k+1}\rangle, \dots, |e_n\rangle$ が $\mathcal{K}^\perp$ の正規直交基底になるようにとる．

$$Q = \sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i|$$

とおくと，任意のベクトル $|x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i |e_i\rangle$ に対して，以下が成り立つことを確認せよ．

(1) $Q|x\rangle \in \mathcal{K}$

(2) $(I-Q)|x\rangle \in \mathcal{K}^\perp$

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
Q|x\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j |e_j\rangle\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_i|e_j\rangle |e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{i,j} |e_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i |e_i\rangle \in \mathcal{K}
\end{aligned}
$$

(2) $I = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|$ を用いると，$I - Q = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|$ である．よって (1) と同様にして，

$$
\begin{aligned}
(I-Q)|x\rangle &= \left(\sum_{i=k+1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j |e_j\rangle\right) = \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_i|e_j\rangle |e_i\rangle \\
&= \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{i,j} |e_i\rangle = \sum_{i=k+1}^{n} x_i |e_i\rangle \in \mathcal{K}^{\perp}
\end{aligned}
$$

[8] 7/3 出題レポート

テンソル積は同型を除いて一意であることの例：二種類のクロネッカー積 $\otimes$, $\otimes'$ を以下で定義する．

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_1 b_3 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_2 b_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_2 \\ a_1 b_3 \\ a_2 b_3 \end{pmatrix}
$$

(1) $\mathbb{C}^2$ の基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\mathbb{C}^3$ の基底 $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，

$$
e_i \otimes' f_j \quad (i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3)
$$

を求めよ．

(2) 以下を満たす行列 P（6×6 行列）を求めよ．

$$
e_i \otimes f_j = P(e_i \otimes' f_j) \quad (i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3)
$$

解答

(1)

$$e_1 \otimes' f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 \otimes' f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 \otimes' f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \otimes' f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes' f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes' f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$e_1 \otimes f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 \otimes f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 \otimes f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \otimes f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，P は次式を満たす.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[9] 7/10 出題レポート

$\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^3$ におけるベクトル $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$, $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^3$ のクロネッカー積を

$$|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \\ \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1\psi_1 \\ \phi_1\psi_2 \\ \phi_1\psi_3 \\ \phi_2\psi_1 \\ \phi_2\psi_2 \\ \phi_2\psi_3 \end{pmatrix}$$

で定義し，行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ のクロネッカー積を

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$$

で定義するとき，

$$(A \otimes B)(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = (A\,|\phi\rangle) \otimes (B\,|\psi\rangle)$$

を示せ．

解答

ブロック行列の計算を行うと，以下の通り示される．

$$(A \otimes B)(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \\ \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\phi_1 B \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} + a_{12}\phi_2 B \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \\ a_{21}\phi_1 B \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} + a_{22}\phi_2 B \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2) \cdot B \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \\ (a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2) \cdot B \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A\,|\phi\rangle)_1 \cdot (B\,|\psi\rangle) \\ (A\,|\phi\rangle)_2 \cdot (B\,|\psi\rangle) \end{pmatrix} = (A\,|\phi\rangle) \otimes (B\,|\psi\rangle)$$